

Mesure optimale des qubits supraconducteurs

par

Mathieu Lachapelle

Mémoire présenté au département de physique
en vue de l'obtention du grade de maître ès science (M.Sc.)

FACULTÉ des SCIENCES
UNIVERSITÉ de SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, 29 novembre 2018

Le 23 novembre 2018

le jury a accepté le mémoire de M. Mathieu Lachapelle dans sa version finale.

Membres du jury

Professeur Alexandre Blais Directeur de recherche
Département de physique

Professeur David Poulin Président rapporteur
Département de physique

Professeur Eva Dupont-Ferrier Membre interne
Département de physique

«On passe notre temps à chercher ce qui nous manque,
sans vraiment savoir ce que c'est...»

Plume Latraverse

Sommaire

La mesure projective est une tâche qu'un ordinateur quantique universel devra effectuer régulièrement. En électrodynamique quantique en circuit, les qubits sont généralement mesurés par l'entremise d'un oscillateur auquel ils sont couplés. Ce mémoire étudie un couplage alternatif à la méthode de couplage conventionnelle. En remplaçant le couplage capacitif par le couplage inductif [1, 2], on montre que la mesure des qubits supraconducteurs obtient plusieurs des avantages que promet la mesure longitudinale [3]. En simulant l'hamiltonien complet de ce nouveau système, on identifie les limites d'une mesure basée sur le couplage inductif et on montre qu'avec des paramètres de circuit réalistes, il est possible de réaliser une mesure avec une fidélité de 99.9% et un aspect quantique non destructif (QND) au-delà de 99.9% en moins de 15 ns.

On étudie également le transmon et le couplage capacitif. On explique pourquoi les opérateurs échelles devraient être évités pour décrire numériquement le transmon et comment ils peuvent être remplacés par des opérateurs dans la base de charge. On présente aussi la mesure dispersive basée sur le couplage capacitif ainsi que ses limites. En étudiant le spectre d'un transmon capacitivement couplé à un oscillateur, on montre l'existence d'un couplage entre les états ionisés du transmon et ses états logiques au-delà d'un certain nombre de photons. Cette observation pourrait expliquer pourquoi le temps de vie d'un transmon diminue lorsqu'on augmente la puissance de mesure.

Finalement, on présente 2 réalisations expérimentales du couplage inductif. L'une est une réalisation 2D et l'autre implique un résonateur 3D.

Remerciements

Je souhaite remercier tous les gens que j'ai cotoyés au cours de ma maîtrise. À commencer par Alexandre qui m'a introduit à un domaine très dynamique et partagé sa passion pour l'innovation et la création. Son imagination et sa vision dans ce domaine m'ont encouragé à continuer à faire de la recherche. Aujourd'hui, je pense être un scientifique qui croit davantage en ses intuitions et en son potentiel. Par ailleurs, je remercie Alexandre de m'avoir donné la chance de participer au March Meeting qui a été pour moi une expérience cruciale dans la manière avec laquelle je perçois maintenant la science et les collaborations entre les scientifiques. Finalement, merci d'avoir mis en place un esprit de collaboration et d'entraide au sein du groupe de recherche.

Je remercie aussi chaleureusement Jérôme pour son aide précieuse dans mes rédactions, mes présentations et mes intuitions scientifiques. C'était très agréable de travailler ensemble sur le projet «longitudinal». Le dynamisme de notre collaboration avec le MIT m'a également donné confiance en mes aptitudes scientifiques. Merci pour tout les conseils, les discussions et le temps donné.

Je remercie Agustin pour tout le temps qu'il m'a offert en développant des outils numériques qui m'ont directement aidé dans ma recherche. Merci aussi pour les conseils sur mon mémoire et sur mes présentations et pour l'enthousiasme contagieux que tu as quand tu travailles. Merci aussi d'avoir égayé mes soirées avec ces magnifiques chansons argentines et par le tango.

Je remercie Baptiste pour chacune des milliers de réponses qu'il a données à mes questions. Son talent pour vulgariser des concepts abstraits que je ne saisisais pas toujours du premier coup m'a été très utile pour accélérer mes apprentissages et mon travail.

Je remercie Lucas, d'avoir été mon oreille dans les moments où je remettais en question la qualité de mon travail. Merci également d'avoir été un défenseur exceptionnel dans mon équipe de soccer et surtout, un copilote incroyable pour décider du chemin à prendre pour éviter le trafic.

Je remercie aussi Udsen pour toutes les réponses à mes questions. Merci aussi pour les rires que nous avons partagés et pour les discussions intéressantes que nous avons eues sur l'heure du dîner.

Je remercie également tous mes ami.e.s qui m'ont prêté logis au cours de mon dernier été à Sherbrooke (Oumar, Jessica, Maxime, Marie-Ève, Benoît et Lisa-Marie). Merci aussi à mes partenaires de soccer et de dards avec qui j'ai partagé de beaux moments durant mes deux années à Sherbrooke.

Table des matières

Sommaire	iii
Introduction	1
1 Circuits et qubits supradoncteurs	3
1.1 Bases des circuits supraconducteurs	3
1.1.1 L'oscillateur harmonique	3
1.1.2 Qubits supraconducteurs	7
1.2 Étude des bases pour la simulation numérique du transmon	10
1.2.1 Base de phase	10
1.2.2 Base des charges	12
1.2.3 Base de Fock	14
2 Mesure basée sur le couplage capacitif	18
2.1 Systèmes quantiques ouverts	19
2.2 Électromagnétisme quantique en circuit	20
2.3 Mesure dispersive	21
2.3.1 Déplacement dans l'espace des phases	24
2.3.2 Mesure homodyne	27
2.3.3 Mesure QND	29
2.3.4 Effet Purcell	30
2.4 Limites de la mesure dispersive	31
2.4.1 Analyse du spectre de charge de l'hamiltonien transverse	31
2.5 Filtre Purcell	36
2.5.1 Hamiltonien et lindbladien effectif	36
2.5.2 Déplacement dans l'espace des phases	39
2.6 Résumé de chapitre	41
3 Mesure basée sur le couplage inductif	42
3.1 Mesure idéale	43
3.2 Implémentation par couplage inductif	45
3.2.1 Circuit et hamiltonien	45

3.2.2	Modulation du flux externe	47
3.2.3	Pompage cohérent de l'oscillateur	47
3.2.4	Décomposition de l'hamiltonien de couplage	48
3.2.5	Étude numérique	51
3.2.6	Fuite des niveaux logiques	54
3.2.7	Aspect QND et effet du déphasage	55
3.2.8	Asymétrie entre les jonctions	59
3.2.9	Absence d'anticroisement dans le spectre de charge	60
4	Implémentations expérimentales de la mesure longitudinale	62
4.1	Réalisation au MIT	63
4.1.1	Analyse des mesures expérimentales du décalage AC de Stark	65
4.2	Réalisation à l'institut Néel	68
4.2.1	Hamiltonien	69
	Conclusion	74
A	Matériel Supplémentaire	76
A.1	Théorie des perturbations pour la fuite des niveaux logiques	76
A.1.1	Cas $n = m = 1$	79
A.1.2	Près des résonances	80
A.1.3	Déphasage ($\gamma > 0$)	81
A.2	Transformation de Polaron pour le filtre Purcell	81
A.3	Relaxation et décohérence	85
	Bibliographie	88

Liste des figures

1.1	Circuits LC	4
1.2	Représentation de Husimi Q	7
1.3	Qubit supraconducteur	8
1.4	États propres du transmon dans l'espace des phases	11
1.5	États propres du transmon dans l'espace des charges	13
1.6	Diagonalisation dans la base des charges	14
1.7	Diagonalisation dans la base de Fock	15
1.8	Erreurs sur les énergies propres des états liés	16
1.9	Énergies propres au-delà du potentiel en cosinus	17
2.1	Schéma expérimental d'un transmon couplé à un oscillateur harmonique	20
2.2	Dynamique de la mesure dispersive dans l'espace des phases	26
2.3	Infidélité d'une mesure	29
2.4	Trois premières énergies propres du transmon en fonction du biais de charge n_g pour différentes valeurs de E_J/E_C	32
2.5	États propres de l'hamiltonien de couplage transverse entre $-E_J$ et E_J	33
2.6	États propres de l'hamiltonien de couplage capacitif au niveau des premiers états ionisés	34
2.7	États propres de l'hamiltonien de couplage transverse près de l'état $\left \widetilde{12g} \right\rangle$	35
2.8	Amplitude des anticroisement	36
2.9	Fonction de transmission d'un oscillateur couplé à l'environnement	37
2.10	Schéma du filtre Purcell	38
3.1	Dynamiques idéales de mesure	44
3.2	Couplage inductif	46
3.3	Déplacement des états cohérents dans l'espace des phases pendant la mesure longitudinale	53
3.4	Fuite vers les niveaux supérieurs	54
3.5	Augmentation de la fuite avec la puissance de mesure	55
3.6	Aspect QND avec la puissance de mesure	57
3.7	Destination du phénomène de fuite	58
3.8	Énergies propres de l'hamiltonien de couplage inductif	58

3.9	Infidélité pendant la mesure longitudinale	59
3.10	Absence d'anticroisement dans le spectre de l'hamiltonien de couplage longitudinal	61
4.1	Circuit discret du MIT	63
4.2	Premiers modes propres du circuit du MIT	64
4.3	Spectroscopie du circuit du MIT	66
4.4	Décalage AC de Stark du dispositif du MIT	67
4.5	Circuit effectif de l'Institut Néel	69
4.6	Aspect QND du dispositif de Grenoble	73
A.1	Théorie des perturbations	80

Introduction

Le domaine de l'informatique quantique traverse présentement un point charnière. Les promesses excitantes de l'ordinateur quantique [4] réunies aux percées scientifiques des dernières années ont réussi à attirer l'attention d'acteurs importants du milieu des hautes technologies. Doté d'investissements à la fois publics et privés, le domaine a maintenant des moyens presque à l'échelle de ses ambitions et peut progresser sur plusieurs fronts [5].

La construction d'un ordinateur quantique universel nécessite deux types d'efforts. D'abord, puisqu'il s'agit d'un jeune domaine, plusieurs avenues demeurent inexplorées et encore beaucoup de recherche fondamentale est indispensable. Afin d'espérer de grands progrès à long terme, la recherche de nouveaux paradigmes doit se poursuivre. Ensuite, afin d'obtenir des résultats à court terme, les méthodes et les matériaux déjà utilisés dans le domaine doivent être mieux compris et optimisés. Ce genre de travail a par exemple permis à IBM de fabriquer un dispositif comptant 50 qubits [6]. Le dispositif fabriqué par Google en 2018 compte quant à lui 72 qubits et bien qu'il ne permette pas d'effectuer de tâches utiles, il permettra au domaine d'identifier des défis scientifiques et d'ingénierie qui devront être surmontés afin d'éventuellement construire un ordinateur quantique universel [7]. D'une certaine manière, mes travaux de recherche ont touché à ces deux volets. En effet, en travaillant sur un nouveau paradigme pour réaliser la mesure des qubits supraconducteurs, je me suis intéressé à la mesure conventionnelle de ces qubits en essayant d'en approfondir la compréhension.

La mesure de qubits est une tâche essentielle que doit effectuer un ordinateur quantique. Par exemple, dans le calcul quantique en circuit, la correction d'erreur est la tâche que l'ordinateur doit accomplir la plus grande partie du temps et elle repose sur des mesures projectives à plusieurs qubits. Ces mesures permettent d'effectuer un

suivi de l'apparition d'erreur sur les qubits au fil de l'avancement du calcul.

En électrodynamique quantique en circuit [8], l'architecture des qubits supraconducteurs, la performance limitée de la mesure projective est l'un des facteurs qui rend impossible la construction d'un dispositif capable de réaliser de la correction d'erreur. Puisqu'il s'agit de l'architecture privilégiée par des leaders du domaine pour construire leurs dispositifs quantiques, les avancées de l'informatique quantique, à court terme, sont étroitement reliées à l'amélioration de la mesure des qubits supraconducteurs.

Pendant ma maîtrise, j'ai travaillé au développement d'une nouvelle manière de mesurer les qubits supraconducteurs. En général, un qubit est mesuré par l'entremise d'un résonateur auquel il est couplé. Les dispositifs réalisés jusqu'à maintenant utilisent un couplage que l'on nomme capacitif. Bien que ce genre de couplage ait connu beaucoup de succès et qu'il soit à la base de toutes les expériences du domaine, les performances de la mesure ont plafonné et un changement de paradigme semble nécessaire pour continuer son amélioration. Dans ce travail, je montre l'avantage théorique du couplage inductif pour réaliser une mesure plus rapide et non destructive.

Mon mémoire est séparé de la manière suivante. Au premier chapitre, j'introduis le qubit supraconducteur de type transmon [9] et je présente une étude numérique de ce dernier où j'identifie une manière efficace de simuler sa physique. Le deuxième chapitre est consacré à la mesure conventionnelle des qubits supraconducteurs. Ce type de mesure est basé sur le couplage capacitif d'un qubit supraconducteur à un résonateur coplanaire [8, 10]. J'introduis donc ce système avant d'étudier plus en profondeur l'effet sur la mesure du bruit de charge et des états ionisés. Finalement, je présente une description analytique du filtre Purcell, dispositif essentiel pour que le couplage capacitif d'un transmon à un oscillateur ne réduise pas considérablement le temps de vie du qubit [11]. Au chapitre 3, j'étudie la mesure basée sur le couplage inductif comme alternative à la mesure basée sur le couplage capacitif. Il s'agit du cœur de mon travail et je présente des simulations qui mettent en lumière les limites de ce type de mesure, mais aussi, son avantage incontestable sur la mesure conventionnelle. Finalement, au chapitre 4, je détaille deux réalisations expérimentales de ce type de couplage, l'une en cours de réalisation au MIT à Boston et l'autre, à l'institut Néel à Grenoble.

Chapitre 1

Circuits et qubits supradoncteurs

1.1 Bases des circuits supraconducteurs

À basse température, la dissipation d'énergie dans un circuit électrique supraconducteur peut être suffisamment basse pour que des effets quantiques soient observables [12]. Ces circuits électriques sont composés d'éléments de circuit conventionnels tels que l'inductance et la capacité, mais aussi de jonctions de Josephson, élément qui détient un rôle crucial pour le traitement de l'information quantique. Dans ce chapitre, j'introduis brièvement les bases permettant le traitement analytique de ces circuits. À la fin du chapitre, je présente également une étude numérique approfondie du transmon qui est le qubit supraconducteur le plus utilisé expérimentalement dans l'architecture des circuits supraconducteurs. Cette étude remet en question la manière avec laquelle on doit le traiter numériquement.

1.1.1 L'oscillateur harmonique

Afin d'étudier le circuit LC, qui est une réalisation en circuit électrique d'un oscillateur harmonique, il est utile d'introduire la variable de flux de branche $\Phi(t)$ [13]

donnée par

$$\Phi(t) = \int_0^t V(\tau) d\tau, \quad (1.1)$$

où $V(t)$ est la différence de potentiel dépendante du temps aux bornes d'un élément de circuit. Dans le reste du mémoire, on assumera la dépendance temporelle des variables de flux comme Φ sans l'écrire explicitement. L'énergie emmagasinée par différents éléments de circuits peut s'écrire avec cette variable, notamment, les énergies emmagasinées par une capacité ou une inductance sont respectivement définies par

$$E_C = \frac{C}{2} \dot{\Phi}^2, \quad E_L = \frac{1}{2L} \Phi^2. \quad (1.2)$$

Le circuit LC, présenté à la figure (1.1), est formé de ces deux composantes. Dans un circuit, on associe une variable de flux à chaque noeud. Le flux de noeud est défini comme l'intégrale de la différence de potentiel entre un noeud et la masse, dont le flux de noeud est donné par $\Phi_g = 0$. Le flux de branche d'un élément de circuit vaut donc la différence entre les flux de noeud à ses bornes. Dans le cas du circuit LC, la

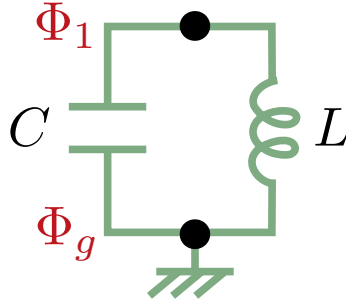


FIGURE 1.1 – Circuit LC et oscillateur harmonique quantique.

différence de flux aux bornes des deux composantes qui est

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_g, \quad (1.3)$$

peut être choisie comme la coordonnée généralisée du système mécanique. De ce choix, il découle que l'inductance, dont l'énergie dépend du flux, contient l'énergie potentielle du système, tandis que la capacité, dont l'énergie dépend de la dérivée du flux, contient

l'énergie cinétique. Le lagrangien d'un tel système s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{C}{2}\dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2L}\Phi^2 \quad (1.4)$$

et les équations de Lagrange mènent à l'équation du mouvement

$$\Phi = \Phi_{t=0} \cos(\omega t) + \dot{\Phi}_{t=0} \sin(\omega t) \quad (1.5)$$

où $\Phi_{t=0}$ et $\dot{\Phi}_{t=0}$ sont les conditions initiales de la coordonnée Φ et où la fréquence de résonance est donnée par $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Cette équation du mouvement correspond à celle d'un oscillateur harmonique. En utilisant la transformation de Legendre [14], on trouve finalement l'hamiltonien

$$H = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L}, \quad (1.6)$$

où p est le moment conjugué de la coordonnée généralisée Φ et correspond à la charge coulombienne sur le condensateur.

Quantification du système

Pour passer à une description quantique, les variables Φ et Q sont promu à des opérateurs qui respectent la relation de commutation canonique

$$[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar. \quad (1.7)$$

Du même souffle, on peut introduire les opérateurs d'annihilation, \hat{a} , et de création, \hat{a}^\dagger qui respectent la relation de commutation $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Ils facilitent le traitement des oscillateurs harmoniques quantiques ou des systèmes qui s'en approchent. Ces opérateurs sont donnés par

$$\hat{a} = +i\frac{\hat{Q}}{\sqrt{2C\hbar\omega}} + \frac{\hat{\Phi}}{\sqrt{2L\hbar\omega}}, \quad (1.8)$$

$$\hat{a}^\dagger = -i\frac{\hat{Q}}{\sqrt{2C\hbar\omega}} + \frac{\hat{\Phi}}{\sqrt{2L\hbar\omega}}, \quad (1.9)$$

et permettent de réécrire l'hamiltonien (1.6) comme

$$H = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}. \quad (1.10)$$

Afin d'alléger la notation dans le présent mémoire, les accents circonflexes ne seront plus utilisés pour indiquer les opérateurs. Pour la même raison, on normalisera tous les hamiltoniens présentés par la constante \hbar .

L'espace des phases et l'état cohérent

L'espace des phases est généré par les degrés de liberté d'un système mécanique. Puisque la coordonnée et le moment conjugué d'un système quantique respectent l'inégalité d'Heisenberg, un état quantique ne peut pas être décrit par un seul point dans cet espace. Il doit plutôt occuper une région dans laquelle sa densité de quasi-probabilité varie. Un état cohérent est un état quantique qui sature l'inégalité d'Heisenberg. L'état fondamental de l'oscillateur harmonique est lui-même un état cohérent qu'on appelle l'état du vide. Il est possible de générer tous les états cohérents en appliquant l'opérateur de déplacement à l'état du vide. L'opérateur de déplacement est donné par

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), \quad (1.11)$$

de sorte qu'un état cohérent arbitraire puisse être donné par

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle. \quad (1.12)$$

Une propriété importante des états cohérents est que $\langle\alpha|a|\alpha\rangle = \alpha$. On a donc que $\langle\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2C\hbar\omega}}\langle a - a^\dagger \rangle = \text{Re}[\alpha]$ et $\langle Q \rangle = \frac{1}{\sqrt{2L\hbar\omega}}\langle a - a^\dagger \rangle = \text{Im}[\alpha]$. Le nombre complexe α donne donc des informations sur les valeurs moyennes de la coordonnée généralisée et du moment conjugué du système.

Plusieurs représentations graphiques permettent de décrire un état quantique, défini par sa matrice densité ρ , dans l'espace des phases. Lorsque l'état se rapproche d'un état cohérent, la représentation Husimi Q est utilisée [15]. L'amplitude de cette fonction en un point de l'espace des phases est donnée par le chevauchement entre ρ

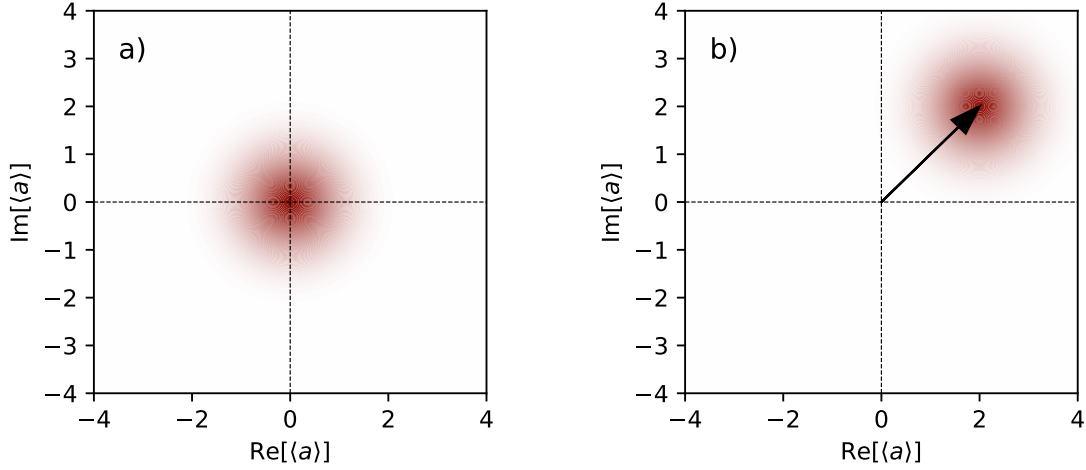


FIGURE 1.2 – a) État du vide d’un oscillateur harmonique représenté par la fonction Husimi Q . b) État du vide déplacé en $\alpha = 2 + 2i$ par l’opérateur de l’Éq. (1.11). Dans le référentiel du laboratoire, un état cohérent tourne dans l’espace des phases à la fréquence propre de l’oscillateur harmonique.

et la matrice densité d’un état cohérent centrée à ce point précis tel que

$$Q(\alpha) = \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle. \quad (1.13)$$

La figure (1.2) illustre la fonction Husimi Q de l’état du vide et d’un état cohérent centré en $\alpha = 2 + 2i$. L’état cohérent d’un oscillateur tourne à la fréquence $\omega/2\pi$ dans l’espace des phases. On représente généralement l’état d’un oscillateur dans un espace des phases où les axes tournent à cette fréquence, de sorte que les états cohérents y soient immobiles. Il s’agit du référentiel tournant.

1.1.2 Qubits supraconducteurs

L’oscillateur harmonique ne permet pas de traiter directement l’information quantique. Le traitement de l’information quantique nécessite en effet un système quantique dans lequel il est possible de préparer n’importe quelle superposition de deux états orthogonaux. Or, les niveaux d’énergie de l’oscillateur harmonique sont également espacés et exciter le système à sa fréquence de résonance à partir de l’état du vide génère un état cohérent. Préparer une superposition de seulement deux états

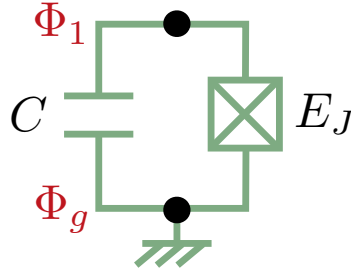


FIGURE 1.3 – Circuit d’un qubit supraconducteur. Il s’agit d’un circuit LC dans lequel l’inductance linéaire a été remplacée par une jonction Josephson.

orthogonaux est donc impossible.

Afin d’y parvenir, une non-linéarité doit être ajoutée au système. La composante électronique qui permet cette non-linéarité sans ajouter pour autant de dissipation est la jonction Josephson [16]. Cette dernière est créée par deux supraconducteurs séparés par un matériau isolant. Les supraconducteurs doivent être suffisamment rapprochés pour qu’il soit possible à des paires de Cooper de passer d’un supraconducteur à l’autre par effet tunnel. L’énergie associée à cet effet tunnel est connue sous le nom d’énergie Josephson E_J . La jonction Josephson peut être vue comme une inductance non-linéaire et remplacer l’inductance du circuit LC de la figure (1.1) par cette composante conduit à un espacement variable entre les niveaux d’énergie du système. La figure (1.3) est la représentation graphique de ce circuit supraconducteur.

En fait, l’énergie emmagasinée dans une jonction Josephson est proportionnelle au cosinus de son flux de branche. Le circuit présenté à la figure (1.3) est décrit par l’hamiltonien

$$H = \frac{Q^2}{2C} - E_J \cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi\right), \quad (1.14)$$

où Φ_0 est le quantum de flux [17]. Pour des raisons qui deviendront évidentes plus tard, la valeur de l’argument du cosinus demeure petite lorsque ce dernier contient peu d’énergie et une expansion au quatrième ordre du cosinus est une bonne approximation (1.14). En mettant en évidence Φ^2 dans l’expansion, on obtient l’hamiltonien

$$H = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L(\Phi)}, \quad (1.15)$$

où l'inductance $L(\Phi)$ est non-linéaire puisqu'elle dépend de la coordonnée Φ . En utilisant la valeur de l'inductance en $\Phi = 0$ ainsi que les opérateurs échelles donnés aux Éq. (1.8) et (1.9), l'hamiltonien peut finalement se réécrire comme

$$H = \omega b^\dagger b - E_C b^{\dagger 2} b^2, \quad (1.16)$$

où la lettre b a été utilisée plutôt que la lettre a pour représenter les opérateurs échelles. La lettre b sera toujours utilisée pour écrire les opérateurs échelles des qubits supraconducteurs. Pour arriver à l'expression (1.16), des termes oscillant rapidement dans le référentiel tournant ont été négligés. Cette approximation s'appelle l'approximation séculaire et elle est valide si la fréquence à laquelle oscille un terme d'hamiltonien est beaucoup plus grande que son amplitude. Dans ce cas-ci, les termes proportionnels à $b^{\dagger m} b^n$ pour lesquels $m \neq n$ et qui tournent à la fréquence $(m - n) \omega_q$, sont négligés. Par ailleurs, l'énergie de charge E_C est donnée par

$$E_C = \frac{e^2}{2C}. \quad (1.17)$$

Il s'agit de l'anharmonicité de l'oscillateur, soit la différence entre la transition ω_{01} ($|0\rangle \rightarrow |1\rangle$) et la transition ω_{12} ($|1\rangle \rightarrow |2\rangle$). C'est grâce à cette anharmonicité qu'il est possible de préparer l'état $|1\rangle$ du système sans que les niveaux supérieurs ne soient excités. En fonction des opérateurs échelles, l'argument du cosinus à l'Éq. (1.14) est $\left(\frac{2E_C}{E_J}\right)^{\frac{1}{4}} (b + b^\dagger)$. L'expansion du cosinus au quatrième ordre est donc valide si les fluctuations $\langle b + b^\dagger \rangle$ sont faibles et si $E_C/E_J \ll 1$. Ce dernier choix de paramètres mène au régime transmon qui réduit l'effet du bruit des charges sur le temps de vie des qubits [9]. Les qubits supraconducteurs étudiés dans ce mémoire sont dans ce régime.

Boucle SQUID

Dans le circuit présenté à la figure (1.3), on peut remplacer la jonction Josephson par deux jonctions identiques, d'énergie de Josephson $E_J/2$, placées en parallèle. Un flux externe (Φ_x) peut ensuite être utilisé pour modifier l'énergie de Josephson effective de la double jonction. L'hamiltonien résultant est

$$H = \frac{Q^2}{2C} - E_J \cos\left(\frac{\pi}{\Phi_0} \Phi_x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi\right), \quad (1.18)$$

où Φ_x est le flux externe. Ce nouveau paramètre de contrôle permet entre autres de réaliser le couplage inductif, dont il sera question au chapitre 3. Il permet aussi de changer la fréquence du transmon pendant une expérience et de réaliser des portes logiques à deux qubits [18].

1.2 Étude des bases pour la simulation numérique du transmon

L'hamiltonien (1.16) est trop approximatif pour être utilisé dans des simulations précises du système physique qu'il décrit. En effet, il permet une bonne description des trois premiers états propres du transmon mais ses niveaux supérieurs ne correspondent pas à la physique du transmon. Or, ces niveaux supérieurs peuvent être excités lorsqu'un transmon est mesuré et simuler numériquement la mesure avec précision requière une bonne description de plusieurs états propres du transmon. À la section qui suit, on présente une étude des différentes manières de décrire le transmon numériquement.

1.2.1 Base de phase

L'hamiltonien du transmon dans la base de phase s'obtient en redéfinissant la coordonnée Φ et le moment conjugué Q de l'équation (1.14) selon les équations,

$$\phi = \frac{2\pi\hbar}{\Phi_0}\Phi, \quad n = \frac{\Phi_0}{2\pi\hbar}Q, \quad (1.19)$$

où n est maintenant l'opérateur donnant le nombre de paires de Cooper dont est chargée l'île supraconductrice désignée par Φ_1 à la figure (1.3). Il peut s'écrire

$$n = -i\hbar \frac{d}{d\phi}, \quad (1.20)$$

expression qui permet d'écrire l'hamiltonien dans la base de phase sous la forme

$$H = -4E_C \frac{d^2}{d^2\phi} - E_J \cos \phi. \quad (1.21)$$

Le rapport E_J/E_C définit entièrement les états propres et les énergies propres, normalisées par E_J , du transmon. L'équation aux valeurs propres de l'hamiltonien (1.21) peut être résolue analytiquement [9] et ses premiers états propres ainsi que le potentiel en cosinus sont tracés à la figure (1.4). On remarque que le nombre d'états liés, dont les énergies propres sont inférieures à E_J , est restreint. Ce nombre augmente avec le rapport E_J/E_C et peut être approximé par

$$n_{\text{états liés}} \approx \sqrt{\frac{E_J}{2E_C}}. \quad (1.22)$$

Au cours des prochaines pages, nous considérerons souvent *l'état lié milieu* du potentiel qui dans le cas illustré à la figure (1.4) est le quatrième état propre. Le numéro de cet état augmente avec le rapport E_J/E_C et l'étudier permet d'avoir une intuition sur la validité de l'ensemble des états liés.

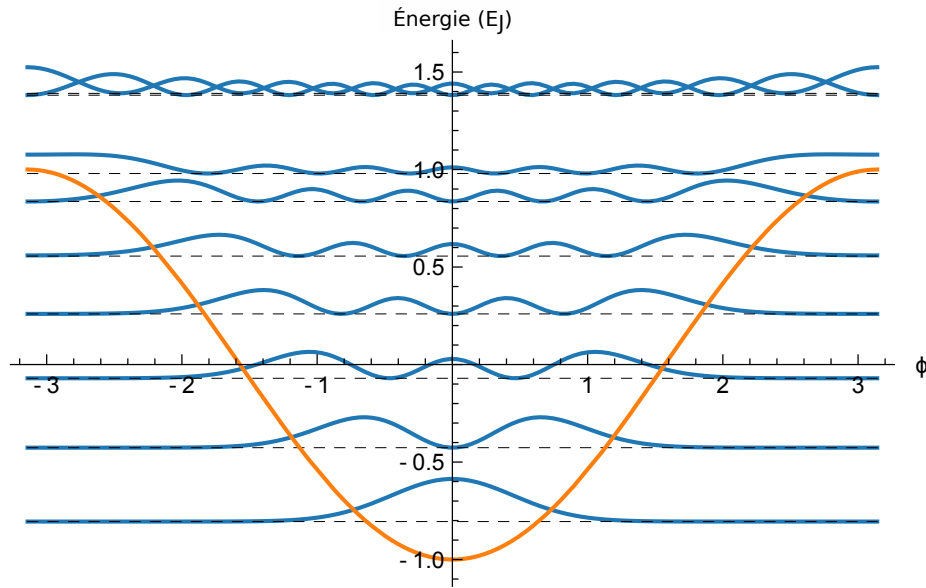


FIGURE 1.4 – Densités de probabilité des fonctions d'onde des 9 premiers états propres de l'hamiltonien (1.21) tracées dans l'espace Φ (en bleu) avec une période du potentiel cosinus du transmon (en orange). Les lignes pointillées sont alignées avec l'énergie propre des différentes fonctions d'onde. Rapport $E_J/E_C = 50$.

Comme la solution dans la base de phase est analytique, nous étudierons les erreurs sur les énergies propres obtenues avec la base des charges et la base de Fock en les comparant avec les énergies obtenues dans la base de phase.

1.2.2 Base des charges

Si le transmon est isolé, la représentation dans la base de phase est suffisante. Cependant, le transmon est généralement couplé à d'autres systèmes par l'entremise de l'opérateur charge n (couplage capacitif) ou de l'opérateur $\cos \phi$ (couplage inductif). Dans ces cas, le système complet ne peut plus être résolu analytiquement et il doit être étudié numériquement. Si l'on souhaite faire l'étude dans la base de phase, la variable ϕ doit être discrétisée et des erreurs numériques apparaissent. On peut alors tirer avantage du fait que le moment conjugué du système est une variable discrète et diagonaliser le système dans cette base.

Plutôt que d'écrire cette dernière variable comme la dérivée par rapport à la variable continue ϕ , l'opérateur n de l'équation (1.19) peut être écrit dans la base discrète du nombre de paires de Cooper [17] :

$$n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |n\rangle \langle n|. \quad (1.23)$$

Dans cette base, l'opérateur $\cos \phi$ s'écrit

$$\cos \phi = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1|, \quad (1.24)$$

et l'hamiltonien du transmon dans la base des charges s'écrit

$$H = 4E_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |n\rangle \langle n| - \frac{E_J}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n|. \quad (1.25)$$

Les probabilités des fonctions d'onde des 10 premiers états propres sont présentées dans l'espace des charges à la figure (1.5). Tout comme l'hamiltonien dans la base de phase, l'hamiltonien de l'Éq. (1.25) est diagonalisable analytiquement. Cependant, nous nous intéressons ici aux solutions numériques qui seront utilisées en pratique. Puisque l'hamiltonien s'exprime sans approximation comme une matrice, il est facile d'utiliser des méthodes de diagonalisation numérique pour en extraire les vecteurs et les valeurs propres. Pour ce faire, le système doit nécessairement être tronqué. La figure (1.6) présente une étude de la convergence des énergies propres de différents

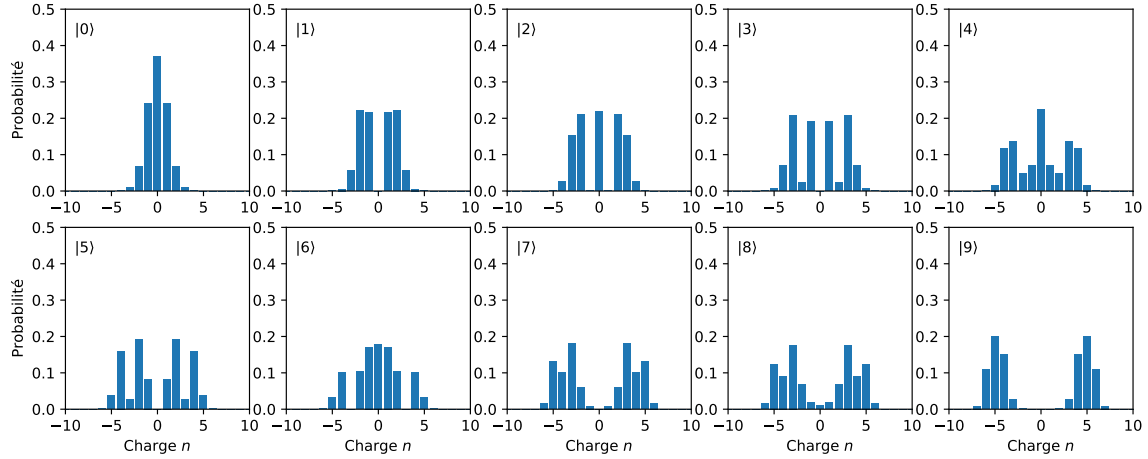


FIGURE 1.5 – Probabilité des fonctions d’onde des 10 premiers états propres de l’hamiltonien (1.21) tracés dans l’espace discret des charges. Rapport $E_J/E_C = 50$.

états liés en fonction de la taille de la matrice hamiltonienne utilisée. En ordonnée, ces graphiques tracent la valeur de

$$\epsilon = \frac{|E_{charge} - E_{phase}|}{E_{phase}} \times 100\%, \quad (1.26)$$

soit l’erreur relative entre l’énergie propre calculée dans la base des charges et l’énergie propre calculée sans approximation dans la base de phase. Les figures (1.6 a), b) et c) présentent respectivement les erreurs relatives de l’énergie du premier état propre, de l’état lié milieu et du dernier état lié. Finalement, les lignes pointillées verticales sont alignées au numéro du dernier état lié pour les différents rapports E_J/E_C présentés. Cette figure peut être utilisée pour connaître le nombre de niveaux de charge nécessaire pour diagonaliser l’hamiltonien avec une précision suffisante. Empiriquement, on trouve que pour calculer adéquatement tous les états liés, on doit utiliser un espace des charges environ deux fois plus grand que le nombre d’états liés donné approximativement par l’équation (1.22).

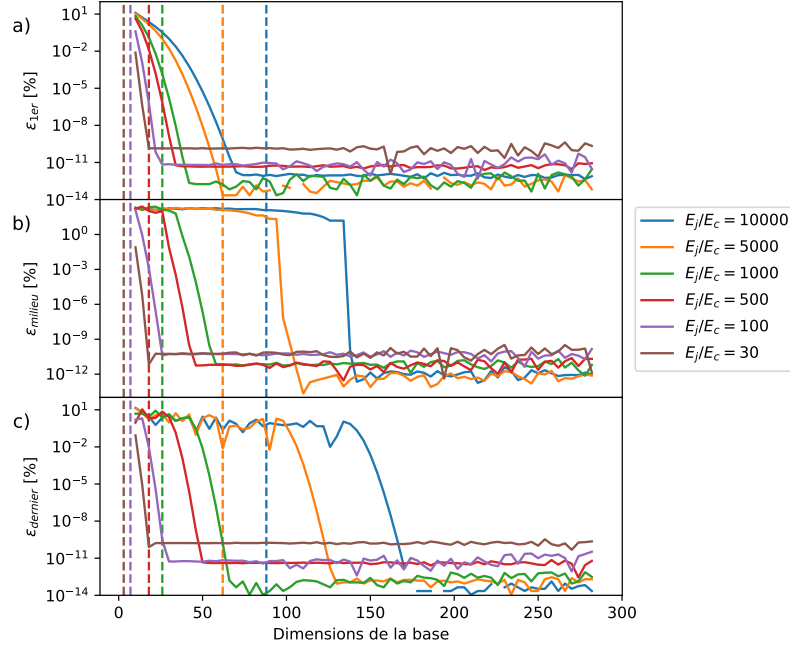


FIGURE 1.6 – Convergence des énergies propres de l’hamiltonien dans la base des charges. Les lignes pointillées sont alignées au numéro du dernier état lié pour chaque rapport E_J/E_C .

1.2.3 Base de Fock

L’hamiltonien du transmon (1.14) peut également être réécrit dans la base de Fock à l’aide des opérateurs échelles :

$$H = \sqrt{\frac{E_J E_C}{2}} (b - b^\dagger)^2 - E_J \cos \left[\left(\frac{2E_C}{E_J} \right)^{\frac{1}{4}} (b + b^\dagger) \right]. \quad (1.27)$$

Cette manière d’écrire l’hamiltonien semble à première vue correcte puisqu’elle préserve la relation de commutation entre la coordonnée ϕ et son moment conjugué n .

Les opérateurs échelles sont également des matrices infinies et ils doivent être tronqués afin que l’hamiltonien puisse être diagonalisé numériquement. On pourrait s’attendre à ce que la précision de la diagonalisation augmente avec la taille de l’espace d’Hilbert utilisé. Cependant, on note qu’en changeant la taille des matrices, on change également la valeur propre minimale et maximale de l’opérateur ϕ , et donc, l’intervalle sur laquelle est défini le potentiel $\cos(\phi)$. Si le potentiel est défini sur un intervalle qui

diffère de $[-\pi, \pi]$, la périodicité du potentiel en cosinus est perdue et les méthodes de diagonalisation numériques font apparaître des états propres non physiques. Sur la figure (1.7), on voit que ces états non physiques sont localisés dans des puits de potentiel artificiels situés aux extrémités du potentiel.

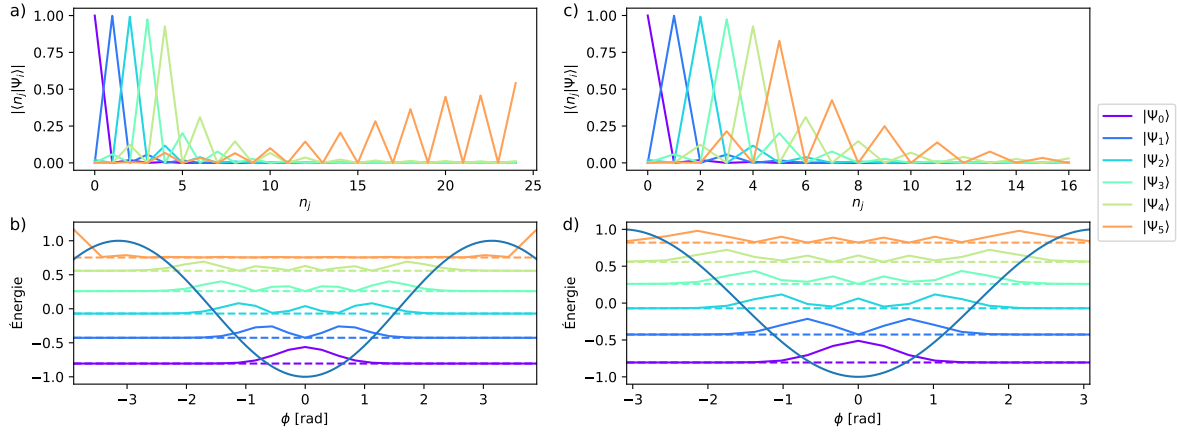


FIGURE 1.7 – Représentation des états propres obtenus par la diagonalisation de l’hamiltonien (1.27). a) Représentation des états propres dans la base de Fock obtenus après la diagonalisation d’une matrice 25×25 . On voit que la fonction d’onde $|\psi_5\rangle$ semble être issue d’un problème numérique. b) On voit les mêmes états propres qu’en a), mais cette fois, tracés dans l’espace ϕ . On remarque que les fonctions d’onde correspondent à celles présentées à la figure (1.5) hormis l’état $|\psi_5\rangle$. Ce dernier est localisé dans les deux puits de potentiel situés aux extrémités du potentiel cosinus. c) Diagonalisation d’une matrice 17×17 . L’état $|\psi_5\rangle$ est mieux décrit. d) On voit que pour une matrice d’une telle taille, le potentiel cosinus existe sur un intervalle très près de $[-\pi, \pi]$. Ceci évite l’apparition de puits de potentiel aux extrémités du potentiel et préserve la condition de périodicité du potentiel en cosinus.

En plus de l’apparition d’états propres non physiques, l’utilisation des opérateurs échelles mène à des erreurs numériques systématiques dont l’origine s’explique facilement : puisque la taille de l’espace d’Hilbert est choisie de telle sorte que le potentiel soit défini sur l’intervalle $[-\pi, \pi]$, les fonctions d’onde des états propres doivent être nulles aux frontières. Cette condition frontière n’existe toutefois pas pour le potentiel cosinus infini et entraîne une erreur sur les énergies propres trouvées avec l’hamiltonien de l’Éq. (1.27). Pour les états propres au fond du potentiel en cosinus, ces nouvelles conditions frontières ont peu d’influence puisque les fonctions d’onde sont presque nulles en $\phi = \pm\pi$. Cependant, l’effet est plus grand pour les états propres de plus hautes énergies. La figure (1.8) présente les erreurs calculées à l’aide de l’Éq. (1.26)

sur les énergies propres des états liés.

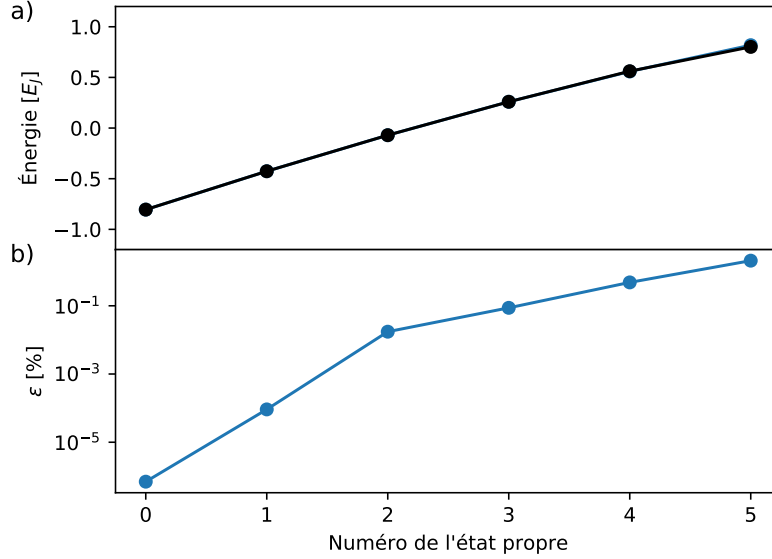


FIGURE 1.8 – a) Les 6 premières énergies propres pour un transmon avec un rapport $E_J/E_C = 50$. b) Erreurs sur les énergies propres calculées avec l'équation (1.26). 17 niveaux sont utilisés afin que ϕ soit défini seulement sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. L'erreur augmente exponentiellement lorsque les énergies propres s'approchent de E_J . On peut remarquer que l'erreur est près de 0.1% (≈ 10 MHz) sur le deuxième état excité. Ceci peut mener à des erreurs significatives sur le calcul du décalage dispersif lorsque l'on couple le transmon à un oscillateur.

Au-delà du potentiel cosinus, l'utilisation des opérateurs échelles ne permet plus de trouver les énergies propres adéquates. Dans la base de Fock, les états propres dont l'énergie est supérieure à E_J sont ceux d'un puits infini, dont le fond a la forme d'un cosinus. En réalité, les états propres à ces énergies sont des états libres diffusés par le potentiel cosinus. Plus on s'éloigne du potentiel, moins ce dernier a un effet et les états propres sont davantage quantifiés par la partie cinétique de l'hamiltonien du transmon. La figure (1.9) permet de voir que les énergies de ces états croissent en effet comme $4E_C n^2$. On nommera ces états les états ionisés puisqu'ils ne sont pas confinés dans un potentiel.

En conclusion, on doit éviter d'utiliser la base de Fock si on souhaite calculer précisément les énergies et les états propres d'un système contenant un transmon. Les résultats présentés à la dernière section permettent d'établir que la base des charges est un bon choix pour simuler ce genre de systèmes. Dans ces cas, l'hamiltonien à l'Éq.

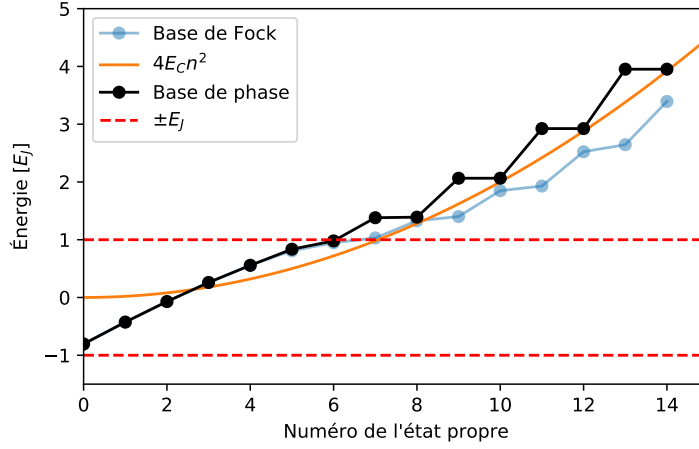


FIGURE 1.9 – Les 15 premières énergies propres du transmon calculées dans la base de phase et dans la base de Fock. Les valeurs minimales et maximales du potentiel cosinus sont marquées par les deux lignes rouges pointillées. On remarque qu’au-delà du potentiel, la diagonalisation réalisée dans la base de Fock ne fonctionne plus. De leur côté, les énergies propres trouvées dans la base de phase suivent la fonction $4E_C n^2$ ce qui indique que ces états ne sont pas influencés par le potentiel cosinus.

(1.25) du transmon isolé doit premièrement être diagonalisé avec un grand espace d’Hilbert. On peut ensuite tronquer l’hamiltonien dans sa base diagonale avant de coupler le transmon à un système plus complexe. Cette méthode sera utilisée dans toutes les simulations numériques présentées dans ce mémoire. Néanmoins, pour les études analytiques, l’utilisation des opérateurs échelles demeure une solution pratique.

Chapitre 2

Mesure basée sur le couplage capacitif

Dans un ordinateur quantique universel, il est essentiel que plusieurs qubits soient mesurables avec une grande fidélité. Dans une réalisation expérimentale, il est aussi souhaitable que ces mesures soient non destructives (QND), c'est-à-dire que suite à sa mesure, 100% de la population du qubit se retrouve dans l'état mesuré. De plus, chaque qubit doit être suffisamment isolé de l'environnement afin qu'ils conservent de bons temps caractéristiques de relaxation et de déphasage. Afin de respecter ces deux conditions contradictoires, les qubits ne peuvent pas être mesurés directement, mais doivent plutôt être couplés à un système quantique intermédiaire qu'on appelle le pointeur. L'oscillateur harmonique est le pointeur qui a permis les meilleures mesures de qubits supraconducteurs réalisées à ce jour [19]. Cet oscillateur prend le plus souvent la forme d'un résonateur coplanaire qu'on couple capacitivement au transmon [8]. Le chapitre qui suit présente les bases théoriques de ce type de mesure. Les limites et les désavantages du couplage capacitif, qu'on nomme aussi couplage transverse, sont également discutés. Afin d'expliquer les difficultés rencontrées dans ce type de mesure, une hypothèse est également avancée selon laquelle le couplage entre les états logiques et les états ionisés du transmon peut réduire le temps de vie du qubit lors de la mesure. Finalement, j'introduis le filtre Purcell que j'ai brièvement étudié au cours de ma maîtrise. Il s'agit d'un dispositif essentiel à la réalisation de bonnes mesures d'un transmon couplé capacitivement à un oscillateur.

2.1 Systèmes quantiques ouverts

Tout système quantique est couplé d'une certaine manière à l'environnement. Cette interaction entraîne l'enchevêtrement des deux parties et fait en sorte qu'il est impossible de décrire parfaitement l'état du système quantique sans inclure l'état de l'environnement. L'environnement est cependant trop complexe pour être inclus dans des simulations et on fait appel à la matrice densité,

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (2.1)$$

pour décrire l'état d'un système quantique au meilleur de notre connaissance. Dans cette expression, p_i est la probabilité que le système soit dans l'état pur $|\psi_i\rangle$ du point de vue d'un observateur [20]. Grâce à cet outil mathématique, il est possible de trouver une équation qui parvient à bien modéliser la dynamique d'un *système quantique ouvert*. Cette équation s'appelle *l'équation maîtresse* et est valide sous deux conditions. Premièrement, le couplage entre le système et l'environnement doit être suffisamment faible pour que l'état du système n'affecte pas beaucoup l'environnement. Deuxièmement, l'environnement doit contenir un ensemble continu de modes dans le domaine de fréquences qui nous intéresse, de telle sorte que sa densité d'états varie peu avec la fréquence. Ces deux conditions permettent de faire l'approximation de Born-Markov et d'obtenir l'équation maîtresse [21]

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \sum_i \gamma_i \mathcal{D}[o_i] \rho, \quad (2.2)$$

où $\mathcal{D}[o_i] \cdot$ est un superopérateur donné par

$$\mathcal{D}[o_i] \rho = o_i \rho o_i^\dagger - \frac{1}{2} \left(o_i^\dagger o_i \rho + \rho o_i^\dagger o_i \right). \quad (2.3)$$

Les opérateurs de dissipation o_i peuvent être physiquement interprétés comme les processus que l'environnement induit au système aux taux dictés par les constantes γ_i . L'équation maîtresse est notamment utilisée en électromagnétisme quantique dont il sera question à la prochaine section.

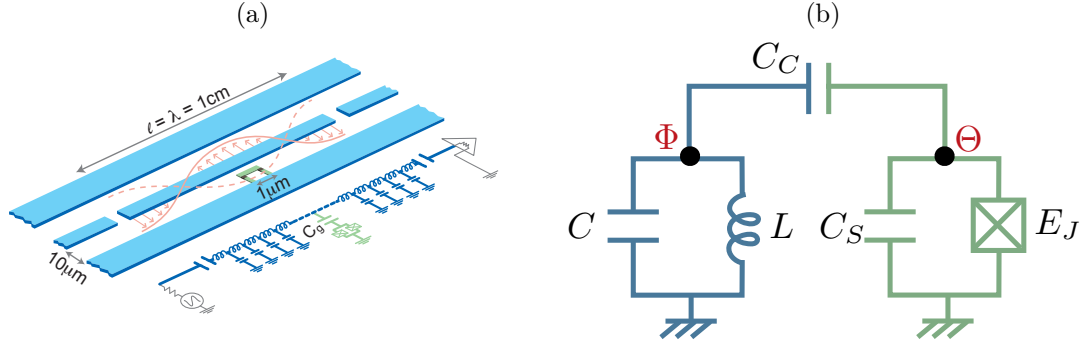


FIGURE 2.1 – (a) Représentation d'un dispositif expérimental permettant la mesure non destructive d'un transmon. Le transmon, en vert, est couplé capacitivement au troisième mode propre du résonateur, en bleu. Ce dernier est capacitivement couplé à la masse (en haut et en bas) ainsi qu'à un câble coaxial (à gauche et à droite). Ce couplage capacitif au câble coaxial mène à l'opérateur de dissipation a . Figure adaptée de [8] (b) Circuit effectif de la réalisation expérimentale où l'on néglige le couplage du résonateur à l'environnement.

2.2 Électromagnétisme quantique en circuit

L'électromagnétisme quantique (ÉQ) est un domaine qui étudie l'interaction entre la matière et la lumière. Dans un circuit, l'équivalent de cette interaction s'obtient en couplant un système bosonique, comme un circuit LC, à un système non linéaire, comme un qubit supraconducteur. On parle alors de l'électromagnétisme quantique en circuit (ÉQC) [8]. La figure (2.1) (a) présente le schéma d'une réalisation expérimentale d'un tel système. Le qubit supraconducteur est représenté par la partie verte tandis que le rectangle central de couleur bleue est un résonateur coplanaire. Ce dernier est couplé capacitivement au qubit, à la masse ainsi qu'à deux lignes à transmission à ses extrémités. D'une longueur finie, le résonateur ne peut supporter qu'un ensemble discret de modes bosoniques tandis que les lignes à transmission peuvent supporter un ensemble continu de modes. En traitant le système qubit-résonateur comme un système quantique ouvert, ces lignes à transmission prennent donc le rôle de l'environnement dans lequel le résonateur coplanaire peut perdre des photons. En dérivant l'équation maîtresse pour ce système, les opérateurs de dissipation o_i dominants sont donc les opérateurs d'annihilations a_i associés à chaque mode du résonateur.

Généralement, la fréquence du qubit est choisie près de celle d'un des modes du

résonateur qu'on appelle le mode de mesure. Si on étudie le système dans la région fréquentielle près du mode du qubit et du mode de mesure, le système peut être réduit à un système quantique à deux modes dont le circuit effectif est illustré à la figure (2.1). L'équation maîtresse de ce système peut être écrite comme

$$\dot{\rho} = -i [H, \rho] + \kappa \mathcal{D}[a] \rho, \quad (2.4)$$

où κ est le taux auquel le mode de mesure perd des photons dans les lignes à transmission. Dans ce cas-ci, on choisit seulement l'opérateur d'annihilation a comme opérateur de dissipation mais de manière générale, d'autres opérateurs de dissipation peuvent être inclus pour simuler d'autres phénomènes dissipatifs comme la décohérence et la relaxation du qubit ou le pompage thermique de la cavité. Les prochaines pages de ce mémoire sont inspirées de l'article publié par le groupe de Yale en 2004 [8].

2.3 Mesure dispersive

À partir du système représenté à la figure (2.1) (a), il est entre autres possible de réaliser une mesure rapide et projective du transmon qu'on nomme la mesure dispersive. Le circuit effectif d'une telle réalisation expérimentale est présenté à la figure (b).

Comme on l'a fait pour étudier analytiquement le transmon à la section (1.2), l'hamiltonien de ce circuit peut être écrit en utilisant les opérateurs d'échelles :

$$H = \omega_r a^\dagger a + \sqrt{\frac{E_J E_C}{2}} (b - b^\dagger)^2 - E_J \cos \left[\left(\frac{2E_C}{E_J} \right)^{\frac{1}{4}} (b - b^\dagger) \right] - g (a - a^\dagger) (b - b^\dagger). \quad (2.5)$$

Une expansion au quatrième ordre du cosinus et l'approximation séculaire mènent ensuite à un hamiltonien qu'on peut écrire comme la somme de l'hamiltonien d'échange,

$$H_L = \omega_r a^\dagger a + \omega_q b^\dagger b + g (ab^\dagger - a^\dagger b), \quad (2.6)$$

où g est le couplage entre l'oscillateur et le transmon, et d'un hamiltonien non-linéaire pour le transmon,

$$H_{NL} = -\frac{E_C}{2}b^{\dagger 2}b^2. \quad (2.7)$$

L'effet du couplage transverse, dont la présence est marquée par le terme proportionnel à g dans H_L , mène à ce qu'on appelle l'habillage des deux systèmes. L'habillage signifie que les états propres du système ne sont plus les mêmes que les états propres des deux systèmes isolés. Il est possible de diagonaliser exactement l'hamiltonien H_L en combinant linéairement les opérateurs a et b . On peut ensuite examiner l'effet de H_{NL} dans cette base.

La transformation de Bogoliubov qui permet de diagonaliser H_L est donnée par l'expression

$$U = \exp \left[\frac{1}{2} \arctan(2\lambda) (a^{\dagger}b - ab^{\dagger}) \right], \quad (2.8)$$

où λ prend la valeur de $\frac{g}{\omega_q - \omega_r}$. En l'appliquant sur l'hamiltonien H_L , cette transformation unitaire mélange les modes a et b de sorte que

$$H'_L = U^{\dagger} H_L U = \tilde{\omega}_r \tilde{a}^{\dagger} \tilde{a} + \tilde{\omega}_q \tilde{b}^{\dagger} \tilde{b}, \quad (2.9)$$

où les modes \tilde{a} et \tilde{b} sont des combinaisons linéaires des modes initiaux et les fréquences $\tilde{\omega}_r$ et $\tilde{\omega}_q$ sont les fréquences des modes propres du système.

Si la différence entre la fréquence de l'oscillateur et la fréquence du qubit est beaucoup plus grande que la valeur de g , $\lambda \ll 1$ et les modes \tilde{a} et \tilde{b} sont presque équivalents aux modes originaux a et b . Dans ce régime dit dispersif, d'où le nom de mesure dispersive, l'hamiltonien H_{NL} prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} H'_{NL} = & -\frac{E_C}{2} (1 - 2\lambda^2 + 7\lambda^4) \tilde{b}^{\dagger 2} \tilde{b}^2 - \frac{E_C}{2} \lambda^4 \tilde{a}^{\dagger 2} \tilde{a}^2 - 2E_C (\lambda^2 - \lambda^4) \tilde{a}^{\dagger} \tilde{a} \tilde{b}^{\dagger} \tilde{b} \\ & + E_C (\lambda - 3\lambda^3) (\tilde{b}^{\dagger} \tilde{b} \tilde{a}^{\dagger} \tilde{b} + \text{H.c.}) + E_C \lambda^3 (\tilde{a}^{\dagger} \tilde{a} \tilde{a} \tilde{b}^{\dagger} + \text{H.c.}) \\ & - \frac{E_C}{2} (\lambda^2 - 4\lambda^4) (\tilde{a}^{\dagger 2} \tilde{b}^2 + \text{H.c.}) + \mathcal{O}(\lambda^5). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Le premier terme de l'expression ci-dessus est l'anharmonicité du transmon et permet

d'approximer le transmon à un système à deux niveaux. Cette approximation est valide si le système n'est jamais modulé à la fréquence de la transition $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$. En utilisant également l'approximation séculaire et en négligeant les termes au-dessus de l'ordre 2 en λ , on obtient finalement l'hamiltonien dispersif

$$H_{eff} = \tilde{\omega}_r \tilde{a}^\dagger \tilde{a} + \tilde{\omega}_q \frac{\sigma_z}{2} + \chi \tilde{a}^\dagger \tilde{a} \sigma_z. \quad (2.11)$$

Le troisième terme de l'hamiltonien ci-dessus indique que les fréquences de résonance des deux systèmes couplés dépendent chacune de l'état dans lequel se trouve l'autre système. Il s'agit du décalage AC de Stark dont le coefficient est donné par

$$\chi = \frac{g^2 E_C}{(\omega_r - \omega_q)^2}. \quad (2.12)$$

L'oscillateur peut agir comme pointeur puisque sa fréquence de résonance dépend de l'état du qubit.

Pour poursuivre notre analyse, il est important de rappeler que l'oscillateur est capacitivement couplé à l'environnement par des lignes à transmission. En connectant ces lignes à une source micro-onde et à un détecteur dont il sera question à la section (2.3.2), il est possible de générer un état cohérent d'une certaine amplitude dans le mode de mesure et de mesurer les photons que le résonateur perd au taux κ . L'effet de la source peut être tenu en compte en ajoutant le terme d'hamiltonien

$$H_p = \epsilon(t) \cos(\omega_p t) (a + a^\dagger) \quad (2.13)$$

à l'hamiltonien total du système, où ω_p est la fréquence porteuse de la source micro-onde et $\epsilon(t)$ est son amplitude temporellement modulable. Avec les opérateurs des modes propres, l'opérateur a s'écrit au premier ordre comme

$$a \approx \tilde{a} + \lambda \tilde{b}, \quad (2.14)$$

de sorte que la source micro-onde affecte aussi le mode du qubit pendant la mesure. Cependant, on choisit généralement $\omega_p = \tilde{\omega}_r$ et le terme de la source affectant le qubit peut être négligé par l'approximation séculaire. Dans le référentiel tournant à $\tilde{\omega}_r$, la

somme des hamiltoniens aux Éq. (2.11) et (2.13) s'écrit

$$H = \tilde{\omega}_q \frac{\sigma_z}{2} + \chi \tilde{a}^\dagger \tilde{a} \sigma_z + \epsilon(t) (\tilde{a} + \tilde{a}^\dagger), \quad (2.15)$$

Cet hamiltonien effectif total permet de calculer analytiquement la dynamique de l'oscillateur pour différentes amplitudes du pulse micro-onde. Dans la suite du traitement analytique, on remplace \tilde{a} par a afin de simplifier la notation.

2.3.1 Déplacement dans l'espace des phases

En sachant que l'oscillateur est initialement dans l'état du vide, il est possible de prédire le déplacement de cet état cohérent dans l'espace des phases en fonction de l'état initial du qubit. La section qui suit explique la démarche permettant d'obtenir une expression analytique pour ce déplacement. En résumé, on doit trouver un référentiel dans lequel l'oscillateur demeure dans l'état du vide malgré la source micro-onde. La dynamique de ce référentiel devrait être celle de l'état cohérent dans le référentiel non déplacé.

Pour y arriver, on doit d'abord appliquer l'opérateur de déplacement donné à l'Éq. (1.11) à la matrice densité du système. La matrice densité déplacée résultante est donnée par

$$\rho^D = D[\alpha(t)] \rho D^\dagger[\alpha(t)]. \quad (2.16)$$

En réécrivant l'équation maîtresse de l'Éq. (2.2) dans ce nouveau référentiel, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^D = & -i \left[D[\alpha(t)] H D^\dagger[\alpha(t)] - i (\dot{\alpha}^*(t)a - \dot{\alpha}(t)a^\dagger) + \frac{i\kappa}{2} (\alpha(t)a^\dagger - \alpha^*(t)a), \rho^D \right] \\ & + \kappa \mathcal{D}[a] \rho^D, \end{aligned} \quad (2.17)$$

où deux nouveaux termes sont présents auprès de l'hamiltonien déplacé dans le commutateur. En appliquant la transformation de déplacement sur l'hamiltonien de l'Éq. (2.15) et en y ajoutant ces nouveaux termes, on trouve un hamiltonien effectif

dans le référentiel déplacé :

$$H_{eff}^D = \chi a^\dagger a \sigma_z + a^\dagger \left[\left(\frac{i\kappa}{2} - \chi \sigma_z \right) \alpha(t) + i\dot{\alpha}(t) + \epsilon(t) \right] + H.c. \quad (2.18)$$

Si l'oscillateur est dans l'état du vide, l'opérateur de dissipation, a , appliqué à ρ^D a une valeur nulle. Ainsi, s'il existe une expression pour $\alpha(t)$ tel que le coefficient devant l'opérateur a^\dagger s'annule, ρ^D demeurera dans l'état du vide indéfiniment. Résoudre l'équation différentielle

$$\dot{\alpha}(t) = - \left(i\chi \sigma_z + \frac{\kappa}{2} \right) \alpha(t) + i\epsilon(t), \quad (2.19)$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = -i \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(\kappa + i\chi \sigma_z)(t-\tau)} \epsilon(\tau) d\tau \quad (2.20)$$

permet donc de trouver le déplacement que suit l'état cohérent dans l'espace des phases.

L'Éq. (2.20) montre que le déplacement de l'état cohérent dans l'espace des phases résulte d'un produit de convolution entre l'amplitude du pulse micro-onde et une fonction qui dépend de κ et de la valeur de $\chi \sigma_z$. La figure (2.2) illustre ce déplacement lorsque $\epsilon(t)$ est constant. On y remarque que l'état de l'oscillateur dépend de l'état du qubit et mesurer la phase des photons qui quittent l'oscillateur permet de mesurer l'état du qubit.

Modulation de l'amplitude du pulse micro-onde

Puisqu'ils sont aussi couplés à l'environnement, les qubits sont sujets à de la relaxation et de la décohérence, phénomènes respectivement caractérisés par les temps T_1 et T_2 . Le processus de relaxation entraîne la population du niveau excité vers le niveau fondamental à un taux donné par γ . Maximiser la vitesse de mesure d'un qubit est donc essentiel pour optimiser sa fidélité. Dans le cas de la mesure dispersive, la vitesse de la mesure est directement liée à la vitesse de séparation des états cohérents présentés à la figure (2.2). Cette séparation peut être accélérée si l'on choisit bien la forme de l'amplitude du pulse micro-onde donnée par la fonction $\epsilon(t)$.

Si l'on déplace l'oscillateur décrit par l'hamiltonien de l'Éq. (2.15) d'une quantité

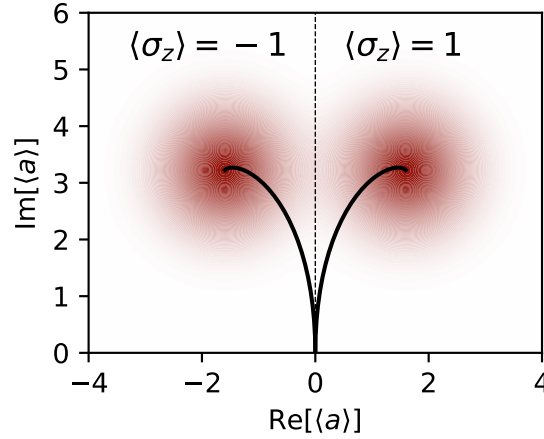


FIGURE 2.2 – Déplacement dans l'espace des phases de l'état de l'oscillateur qui dépend de l'état du qubit. Si la quadrature parallèle à l'axe des abscisses est mesurée, de l'information sur l'état du qubit peut être acquise.

$i\alpha_I$ imaginaire, on obtient le nouvel hamiltonien effectif

$$H_{eff} = \omega_q \frac{\sigma_z}{2} + \chi a^\dagger a \sigma_z + i\chi\alpha_I (a - a^\dagger) \sigma_z \quad (2.21)$$

où le dernier terme mène au déplacement des états cohérents sur l'axe réel de l'espace des phases. À nouveau, le sens de ce déplacement dépend de l'état du qubit. La vitesse de la séparation entre les deux états cohérents est donc proportionnelle à la valeur de $\chi\alpha_I$. Pour augmenter la vitesse de la séparation, on a donc avantage à générer un état cohérent de grande amplitude dans l'oscillateur. Pour des raisons qui seront énoncées à la section (2.4), la qualité de la mesure peut toutefois être compromise si le nombre de photons moyen utilisé pour la mesure est trop grand. On peut donc optimiser une mesure si on arrive à générer rapidement un état cohérent avec une amplitude précise.

On souhaite donc que l'état cohérent atteigne rapidement la coordonnée α_f en suivant le déplacement donné par

$$\alpha(t) = \alpha_f \left(1 - e^{-(t/\tau)^2} \right), \quad (2.22)$$

qui se rapproche de la fonction échelon lorsque τ est petit. En utilisant cette équation et sa dérivée dans l'Éq. (2.19), on trouve que pour obtenir un tel déplacement, la

modulation du pulse doit être donnée par l'expression

$$\epsilon(t) = -i\dot{u}(t) - i\frac{\kappa}{2}u(t). \quad (2.23)$$

Le décalage dispersif χ a été pris égal à 0 dans ce calcul. Cette forme de pulse permet également de réinitialiser rapidement un oscillateur. Il est utilisé dans la mesure rapide réalisée par le groupe de l'ETH Zürich [19]. Ce type de pulse sera réutilisé pour optimiser la mesure présentée au chapitre 3.

2.3.2 Mesure homodyne

Bien qu'il soit une source de décohérence pour l'information quantique, le couplage entre le système et l'environnement est essentiel pour effectuer la mesure de ce dernier. À la figure (2.2), on remarque que l'information sur l'état du qubit est contenue dans la phase de l'état de l'oscillateur. Il est possible de transformer la phase des photons sortant de l'oscillateur en signal en utilisant un interféromètre. Il s'agit de la mesure homodyne [21]. Bien que la dynamique moyenne d'un système quantique soumis à la mesure homodyne soit bien décrite par l'équation maîtresse (2.2), la dynamique d'une mesure unique est décrite par une équation différentielle différente.

En effet, lorsqu'un système de mesure est placé à la sortie de l'oscillateur, l'état de l'environnement auquel l'oscillateur est couplé est constamment mesuré et l'état du système quantique demeure dans un état pur. Comme il s'agit d'un système quantique, cette mesure continue a une rétroaction sur le système et on peut en tenir compte à l'aide de l'équation différentielle stochastique [21]

$$d|\bar{\psi}(t)\rangle = dt \left[-iH - \frac{1}{2}a^\dagger a + J_{hom}(t)a \right] |\bar{\psi}(t)\rangle, \quad (2.24)$$

où J_{hom} est le signal à la sortie de l'oscillateur et est défini par l'expression

$$J_{hom}(t) = \sqrt{\kappa}\langle a + a^\dagger \rangle + \xi(t), \quad (2.25)$$

où $\xi(t)$ est une variable aléatoire ayant une distribution normale de variance $\sigma = 1/\sqrt{dt}$ et non corrélée dans le temps tel que $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t')$.

L'état d'un qubit, dénoté par $|i\rangle$, peut être déterminé après une mesure dispersive unique si le signal mesuré, $J_{hom}(t)$, est bien utilisé. Je m'attarderai ici au calcul de la fidélité de ce type de mesure lorsque le qubit est initialisé dans l'état $|0\rangle$ ou dans l'état $|1\rangle$. On s'intéresse donc à la moyenne de la probabilité conditionnelle $P(i|\vec{J})$ que le qubit ait été initialisé dans l'état $|i\rangle$ si l'on détecte le signal \vec{J} contenant la valeur de $J_{hom}(\tau)$ à chaque temps τ . Avec la loi de Bayes, on trouve que cette probabilité peut se réécrire comme

$$P(i|\vec{J}) = \frac{P(\vec{J}|i) P(i)}{P(\vec{J}|0) + P(\vec{J}|1)}. \quad (2.26)$$

Puisque la partie non déterministe du signal \vec{J} n'est pas corrélée dans le temps, la probabilité $P(\vec{J}|i)$ peut être exprimée comme une multiplication de la probabilité d'obtenir le signal J_τ pour chaque pas de temps

$$P(\vec{J}|i) = \prod_{\tau} P(J_\tau|i). \quad (2.27)$$

Ici, $P(J_\tau|i)$ est une loi normale de variance $\sigma = 1/\sqrt{dt}$ centrée en x_i^τ , valeur de $\sqrt{\kappa}\langle a + a^\dagger \rangle$ au temps τ , tandis que la variable dt est le pas de temps entre chaque valeur connue de \vec{J} . En utilisant ce résultat dans l'équation (2.26) et en prenant la limite d'une mesure continue, on trouve finalement que

$$P(i|\vec{J}) = \frac{1}{1 + \exp \left\{ -\frac{(-1)^i}{2} \int_0^t d\tau 2\sqrt{\kappa} J_i(\tau) [x_0(\tau) - x_1(\tau)] + \kappa [x_1^2(\tau) - x_0^2(\tau)] \right\}}. \quad (2.28)$$

On remarque que cette expression est plus ou moins grande que $\frac{1}{2}$ si l'intégrale au dénominateur est positive ou négative. La manière optimale d'utiliser le signal est de calculer cette intégrale tout au long d'une mesure et de déclarer l'état du qubit selon le signe de l'intégrale. Si la séparation des états cohérents est symétrique, la valeur de $\kappa [x_0^2(t) - x_1^2(t)]$ est nulle. L'expression $x_0(t) - x_1(t)$ devant le signal $J_0(\tau)$ est un filtre linéaire qui permet de donner un poids plus grand au signal recueilli lorsque les états cohérents de la figure (2.2) sont davantage séparés [22].

La fidélité F d'une mesure peut être calculée en prenant la valeur moyenne de

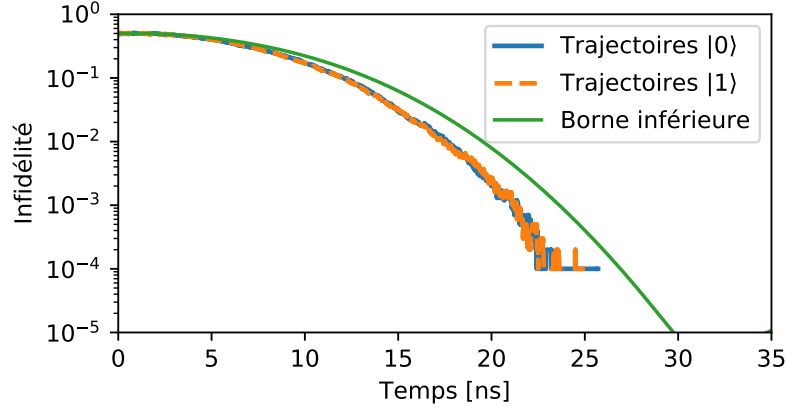


FIGURE 2.3 – Comparaison entre deux méthodes numériques pour calculer la fidélité d’une mesure. En vert, on utilise l’expression (2.29) pour obtenir une borne inférieure de la fidélité, et donc une borne supérieure de l’infidélité. En orange et en bleu, l’infidélité calculée en utilisant l’expression (2.28) à partir du traitement de 10 000 trajectoires.

l’expression (2.28). On peut également donner une borne inférieure à la fidélité si l’état de l’oscillateur est près de celui d’un état cohérent et qu’on n’utilise pas de filtre linéaire [3]. Cette borne inférieure est donnée par l’expression

$$F_{min} = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\kappa}}{4t} \int_0^t d\tau \langle a_1^\dagger \rangle e^{i\phi_h} + \langle a_1^\dagger \rangle e^{-i\phi_h} - \langle a_0^\dagger \rangle e^{i\phi_h} + \langle a_0^\dagger \rangle e^{-i\phi_h} \right) \right], \quad (2.29)$$

où $\langle a^\dagger \rangle_0$ et $\langle a^\dagger \rangle_1$ sont les valeurs moyennes des opérateurs de création de l’oscillateur lorsque le qubit est respectivement initialisé dans l’état fondamental et dans l’état excité. La figure (2.3) compare les infidélités obtenues avec les Éq. (2.28) et Éq. (2.29) pour des simulations de la mesure longitudinale. L’infidélité est défini comme $1 - F$. Nous utiliserons l’Éq. (2.29) dans le reste du mémoire puisque l’utilisation de l’expression exacte (2.3) requiert la simulation de plusieurs milliers de trajectoires. L’expression Éq. (2.29) nécessite quant à elle une seule intégration de l’équation maîtresse.

2.3.3 Mesure QND

Suite à une mesure QND, la population complète d’un qubit doit se retrouver dans l’état qui a été mesuré. Cette figure de mérite est complémentaire à celle de la

fidélité. En effet, une mesure peut être fidèle et rapide, mais non QND [23], et donc, moins utile dans le traitement de l'information quantique. Dans les études numériques de ce mémoire, l'aspect QND sera quantifié par la variable

$$\overline{QND} = \min [\text{Tr}(|0\rangle\langle 0| \rho_{0 \text{ final}}), \text{Tr}(|1\rangle\langle 1| \rho_{1 \text{ final}})] \quad (2.30)$$

où $|\psi_{0 \text{ final}}\rangle$ et $|\psi_{1 \text{ final}}\rangle$ sont les états du transmon à la fin de la mesure lorsque ce dernier est initialisé dans l'état $|0\rangle$ ou dans l'état $|1\rangle$.

Deux phénomènes peuvent réduire l'aspect QND d'une mesure soit le mélange et la fuite. Le *mélange* survient lorsqu'une partie de la population du transmon initialisé dans un des niveaux logiques, se retrouve dans l'autre niveau logique tandis que la *fuite* survient lorsqu'une partie de la population totale du transmon se retrouve dans les niveaux supérieurs au niveau 1.

2.3.4 Effet Purcell

À la section (2.12), la transformation de Bogoliubov a été appliquée à l'hamiltonien de couplage capacitif, mais son effet sur le dissipateur n'a pas été étudié. En fait, au premier ordre, la transformation de Bogoliubov transforme le dissipateur de la manière suivante :

$$\kappa D[a] \rightarrow \kappa D[a - \lambda b] \approx \kappa D[a] + \kappa \frac{g^2}{(\omega_r - \omega_q)^2} D[b]. \quad (2.31)$$

Afin de séparer les opérateurs a et b dans le dissipateur, l'approximation séculaire a été utilisée. Ce changement sur le dissipateur implique que la relaxation de la cavité entraîne la relaxation du qubit au taux

$$\gamma_p = \kappa \frac{g^2}{(\omega_r - \omega_q)^2}. \quad (2.32)$$

Il s'agit de l'effet Purcell. Il est à noter que cette expression n'est strictement valide que pour un résonateur à un seul mode. Une expression tenant compte de la nature multi-modes des résonateurs micro-ondes peut être obtenu à l'aide de l'approche de Caldeira-Legget [24]. Ce taux domine généralement la relaxation du qubit lorsque

κ est grand et lorsque le décalage AC de Stark est fort. Or, limiter la valeur de κ et la valeur du décalage AC de Stark limite également la vitesse de la mesure. Pour réaliser une mesure rapide et fidèle dans cette région de paramètres théoriquement nocive pour le qubit, un dispositif appelé le filtre Purcell est essentiel. Ce dispositif fait en sorte que la relaxation du qubit ne soit plus dominée par l'effet Purcell et il sera traité théoriquement à la section (2.5). D'autres effets indésirables sont liés au couplage capacitif et la section suivante en adresse quelques-uns.

2.4 Limites de la mesure dispersive

Les approximations nécessaires pour obtenir l'Hamiltonien et le dissipateur dispersif ont leurs limites. Tout d'abord, l'hamiltonien dispersif de l'Éq. (2.18) n'est valide que lorsque $g \ll \Delta$. Aussi, si le nombre de photons moyen dans l'oscillateur au cours de la mesure s'approche du nombre de photons critique [8],

$$n_{crit} = \left(\frac{\Delta}{2g} \right)^2, \quad (2.33)$$

les termes d'ordre supérieurs de l'Éq. (2.10) accélèrent la décohérence du qubit réduisant l'aspect QND de la mesure dispersive [25, 26]. Il est cependant expérimentalement observé que l'aspect QND de la mesure est perdu pour des nombres de photons moyens largement inférieurs à n_{crit} . Par exemple, dans la mesure rapide réalisée par le groupe de Zürich en 2017 [19], le nombre de photons moyen, \bar{n} , qui optimise la fidélité de la mesure est de seulement 2.5 pour $n_{crit} \approx 14$. Plus récemment, le groupe de Yale a montré que cette réduction de la valeur effective de n_{crit} pourrait s'expliquer par le fait qu'au cours d'une mesure, les états ionisés du transmon interagissent avec les états logiques du qubit [27, 28]. Une explication complémentaire à l'hypothèse avancée par Yale est énoncée à la section suivante.

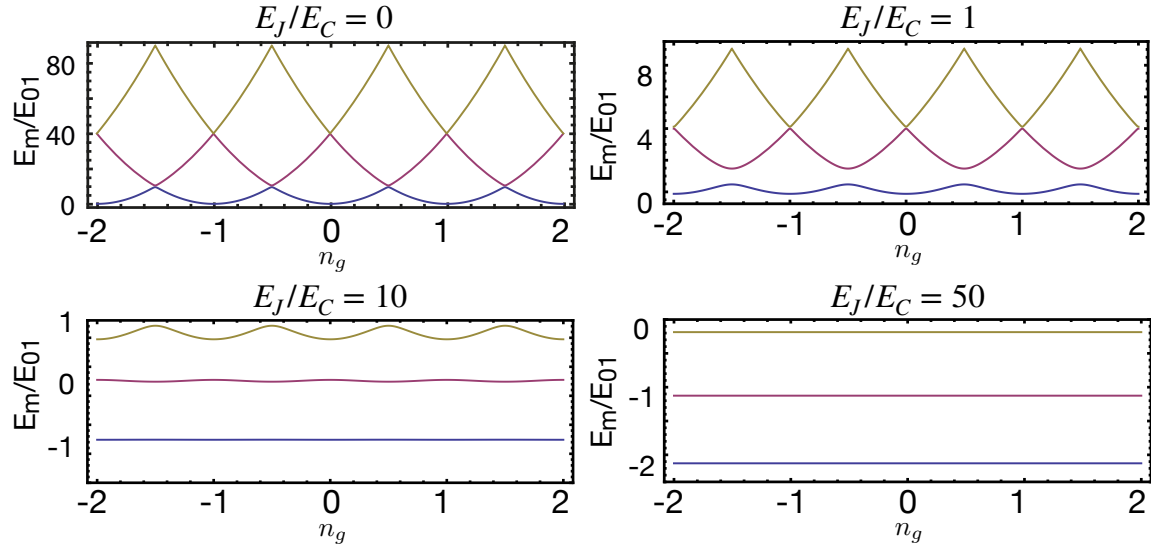


FIGURE 2.4 – Énergies propres E_m en fonction du biais de charge n_g . La largeur des bandes diminue exponentiellement avec la valeur de $\sqrt{8E_J/E_C}$.

2.4.1 Analyse du spectre de charge de l'hamiltonien transverse

Les qubits supraconducteurs sont susceptibles au bruit de charge. Le régime transmon, qu'on obtient en choisissant $E_J \gg E_C$, protège le qubit contre ce type de bruit et s'est donc révélé très important dans l'avancement du domaine [29]. Dans ce régime, les bandes d'énergie en fonction de la charge n_g sur l'île supraconductrice sont presque plates. Une variation de la charge n_g n'affecte donc pas la vitesse de précession du qubit et ne mène pas à de la décohérence. Les bandes d'un transmon isolé sont présentées à la figure (2.4) pour différentes valeurs du ratio E_J/E_C . Les bandes semblent pratiquement plates lorsque $E_J/E_C = 50$ puisqu'en effet, leur largeur diminue exponentiellement avec la valeur de $\sqrt{8E_J/E_C}$ selon l'équation [9]

$$\epsilon_m = (-1)^m E_C \frac{2^{4m+5}}{m!} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{E_J}{2E_C} \right)^{\frac{m}{2} + \frac{3}{4}} e^{-\sqrt{8E_J/E_C}}. \quad (2.34)$$

Toutefois, afin de comprendre comment ce type de bruit peut affecter le transmon lorsqu'il est couplé à un oscillateur dans lequel on peut ajouter des photons, il est

nécessaire d'étudier le spectre de l'hamiltonien de couplage capacitif :

$$H_{trans} = \omega_r a^\dagger a + 4E_C (n - n_g)^2 - E_J \cos(\theta) + \tilde{g} (n - n_g) (a^\dagger - a), \quad (2.35)$$

où le couplage \tilde{g} est relié au couplage standard g par l'expression

$$\tilde{g} = -i4g\sqrt{\frac{E_C}{\omega_q}}. \quad (2.36)$$

Cette renormalisation de g est nécessaire puisque nous utilisons la base de charge et non les opérateurs d'échelle pour décrire convenablement le transmon (voir section 1.2.2). Comme discuté à la section (2.12), le couplage capacitif mène à l'habillage des états propres du transmon par les états propres de l'oscillateur. Dans la base diagonale de l'hamiltonien de l'Éq. (2.35) et dans le régime dispersif, on peut indexer les états propres en leur attribuant un nombre d'excitations photoniques et transmoniques dans les modes habillés. Ces états sont donc nommés $|\widetilde{n_p m}\rangle$, où n_p et m sont respectivement les nombres d'excitations dans l'oscillateur et le transmon habillés. On utilisera les lettres de l'alphabet dans l'ordre (g, e, f, h, i, j, \dots) pour compter les excitations dans le transmon. En faisant varier n_g dans l'hamiltonien de l'Éq. (2.35), on trace à la figure (2.5) le spectre complet du système entre les énergies $-E_J$ et E_J . On y voit des bandes plates et parallèles comme la théorie le prévoit pour $E_J \gg E_C$. Les lignes grasses sur la figure indiquent les états propres avec 0 photon tandis que les lignes étroites indiquent celles avec 1 photon et plus.

On peut également analyser les bandes au-delà de E_J , là où les premiers états ionisés apparaissent. Étant des états propres de l'opérateur de charge, ces états ont la relation de dispersion

$$E(n_g) = 4E_C n^2 - 8E_C n n_g \quad (2.37)$$

où n est le nombre de paires de Cooper sur l'île supraconductrice. La valeur de n peut être négative ou positive et doit être suffisamment grande pour que l'énergie de ces états soit supérieure à E_J . La figure (2.6) présente le spectre en fonction de n_g des premiers états ionisés. Les lignes rouges sont les premiers états ionisés, dont les relations de dispersion sont données par $\pm 32E_C n_g$, puisque ces états propres comptent ± 4 paires de Cooper de part et d'autre de la jonction Josephson. Le graphique de

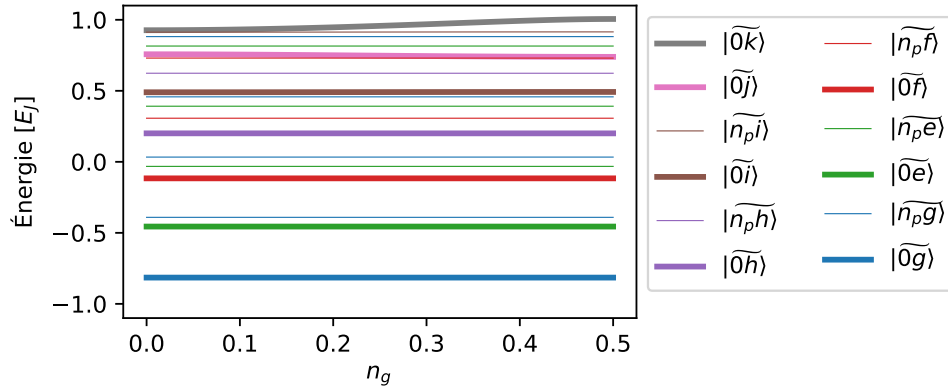


FIGURE 2.5 – Spectre de l’hamiltonien (2.35) sur une demi-période de n_g pour les énergies propres contenues entre $-E_J$ et E_J . Les lignes grasses indiquent les états propres du transmon lorsque l’oscillateur ne contient aucun photon. Le transmon dans les paramètres choisis pour la diagonalisation contient 7 états liés. Les lignes étroites sont des bandes d’énergie d’état avec 1 photon et plus dans le résonateur. Les bandes sont parallèles et plates.

droite présente la bande de l’état $|\widetilde{5g}\rangle$. On voit qu’à la valeur de n_g à laquelle la bande croise celle de l’état ionisé, un anticroisement survient, signe d’un couplage entre les états ionisés et les états logiques du transmon. La figure (2.7) montre quant à elle le spectre près des énergies des états $|\widetilde{12g}\rangle$ et $|\widetilde{12e}\rangle$ où beaucoup d’états ionisés coexistent. L’anticroisement entre l’état $|\widetilde{12g}\rangle$ et l’état ionisé est beaucoup plus grand maintenant que l’oscillateur contient 12 photons.

En traçant l’amplitude des anticroisements en fonction du nombre de photons dans l’oscillateur, comme à la figure (2.8), on voit que la force du couplage dépasse 1 MHz pour les états propres avec 15 photons dans le résonateur. Le même phénomène est observé avec une amplitude un peu plus grande pour l’état excité du transmon. Ces couplages non souhaités pourraient générer de la fuite si l’énergie des états logiques entrent en résonance avec les états ionisés. Or, puisque la relation de dispersion des états ionisés a une forte pente (Éq. 2.37), des résonances entre ces états surviennent à chaque valeur de n_p pour certaines valeurs du biais de charge n_g . Il est également possible que cette fuite soit directement induite par la source micro-onde.

Afin de confirmer ces hypothèses, des simulations de mesures prenant en compte le bruit de charge et les niveaux supérieurs du transmon doivent être réalisées. Par

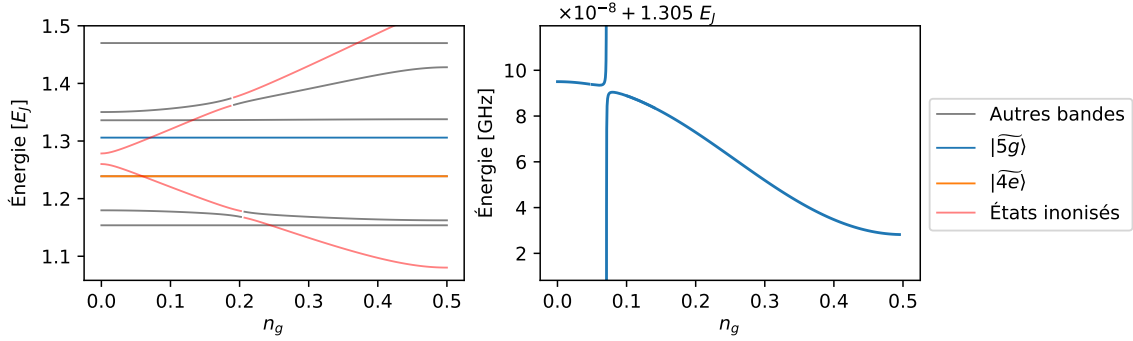


FIGURE 2.6 – Spectre de l'hamiltonien de couplage capacitif à l'énergie des premiers états ionisés. La figure de droite montre l'anticroisement généré par le couplage entre ces états et l'état fondamental du transmon avec 5 photons dans l'oscillateur.

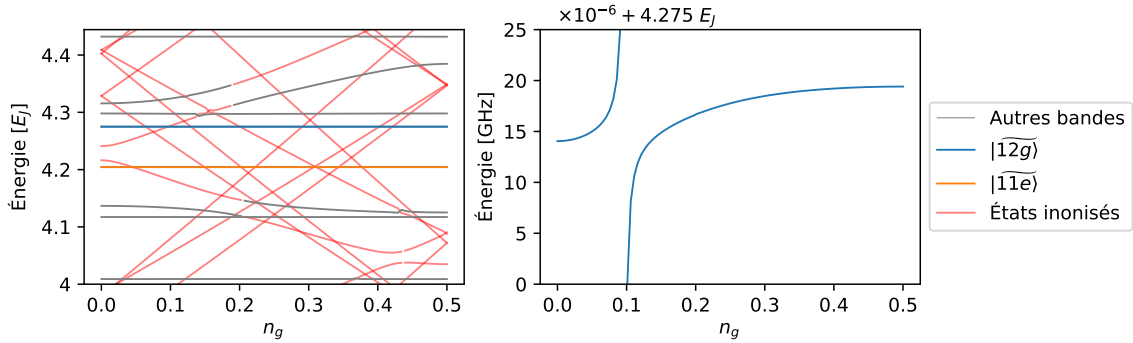


FIGURE 2.7 – Spectre de l'hamiltonien transverse près de l'énergie propre de l'état $|12g\rangle$. On remarque que beaucoup plus d'états ionisés coexistent à ces énergies. Sur la figure de gauche, on remarque l'augmentation de la taille l'anticroisement qui existait déjà pour la bande de l'état $|5g\rangle$ à la figure (2.6).

manque de temps, ces simulations n'ont pas été réalisées dans le cadre de ma maîtrise. Comme nous le montrerons au chapitre 3, ces couplages sont absents pour l'hamiltonien de couplage inductif. Confirmer que ces anticroisements nuisent aux mesures à haute puissance dans le cas de la mesure basée sur le couplage capacitif serait un argument de plus en faveur de la mesure longitudinale. Une autre idée qui pourrait résoudre ce problème serait d'empêcher l'existence des états ionisés en plaçant une super-inductance en parallèle avec la jonction Josephson du transmon [27, 28]. En résumé, les observations faites dans la présente section renforcent l'importance de considérer les états ionisés dans le traitement du transmon.

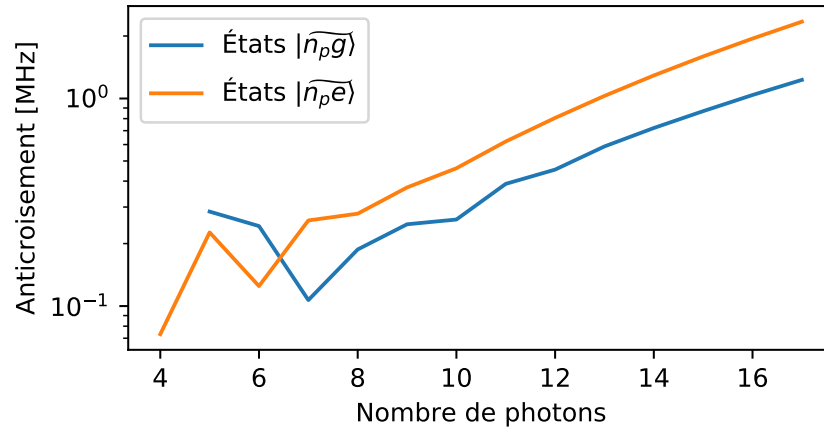


FIGURE 2.8 – Amplitude des anticroisements en fonction du nombre de photons dans l’oscillateur pour l’état fondamental et l’état excité du transmon.

2.5 Filtre Purcell

L’effet Purcell, brièvement introduit à la section (2.3.4), est un problème dû au couplage transverse qui est essentiel de considérer pour parvenir à réaliser de bonnes mesures. Ce phénomène permet à un qubit capacitivement couplé à un oscillateur qui est lui-même couplé à l’environnement de relaxer en émettant un photon par l’entremise de l’oscillateur.

Le rôle du filtre Purcell est de diminuer la densité d’état du système près de la fréquence du qubit. Pour y arriver, deux approches sont couramment utilisées. La première consiste à coupler à l’oscillateur de mesure un filtre coupe-bande à $\omega = \omega_q$ [11]. La deuxième approche consiste à coupler à l’oscillateur un filtre passe-bande désaccordé du qubit [30], comme le présente la figure (2.10). La section qui suit est consacrée à cette deuxième approche.

2.5.1 Hamiltonien et lindbladien effectif

Dans cette section, on souhaite trouver un modèle analytique pour étudier le système filtre-oscillateur-transmon présenté à la figure 2.10. Pour y arriver, on cherche à exprimer l’hamiltonien du système dans une base où les opérateurs du qubit sont

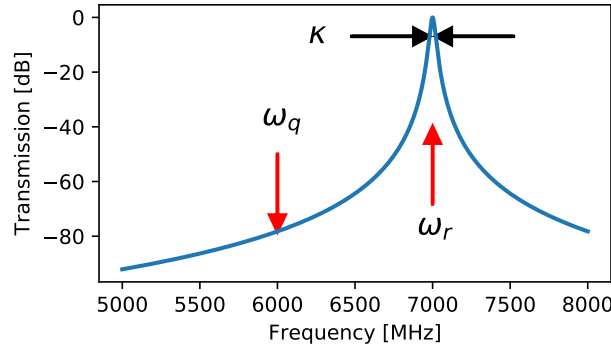


FIGURE 2.9 – Fonction de transmission d’un oscillateur couplé à l’environnement. Puisqu’il est couplé à l’environnement, l’oscillateur peut transmettre des photons de différentes fréquences. On peut limiter l’effet Purcell en désaccordant le qubit de la fréquence de résonance de l’oscillateur.

diagonaux au premier ordre. À partir de cette base, il est possible de trouver le déplacement approximatif des états cohérents dans les deux oscillateurs dépendamment de l’état initial du qubit. Comme on l’a fait pour le système oscillateur-transmon à la section (2.12), il est ensuite possible d’optimiser le pulse afin de maximiser la vitesse de la mesure. J’ai calculé cet hamiltonien afin de trouver le taux de déphasage dû à la mesure. La section qui suit montre comment on obtient un tel hamiltonien à partir du système présenté à la figure (2.10).

Sous l’approximation séculaire et en utilisant les opérateurs d’échelle f , a et b , l’hamiltonien de ce système s’écrit

$$H = \omega_r a^\dagger a + \omega_f f^\dagger f + \omega_q b^\dagger b - \frac{E_C}{2} b^{\dagger 2} b^2 + J (a^\dagger f + a f^\dagger) + g (a^\dagger b + a b^\dagger), \quad (2.38)$$

où J est le couplage entre les deux oscillateurs, tandis que les opérateurs f et f^\dagger sont les opérateurs d’échelles du mode du filtre. Afin d’effectuer la mesure, ce mode doit être couplé à une ligne à transmission qu’on considère à nouveau comme l’environnement du système. Le lindbladien du système est donc donné par

$$\mathcal{L}(\rho) = \kappa \mathcal{D}[f]\rho. \quad (2.39)$$

Il est possible d’arriver à un hamiltonien effectif diagonal si le qubit est désaccordé par rapport à l’oscillateur et au filtre. Pour y arriver, on doit premièrement effectuer une

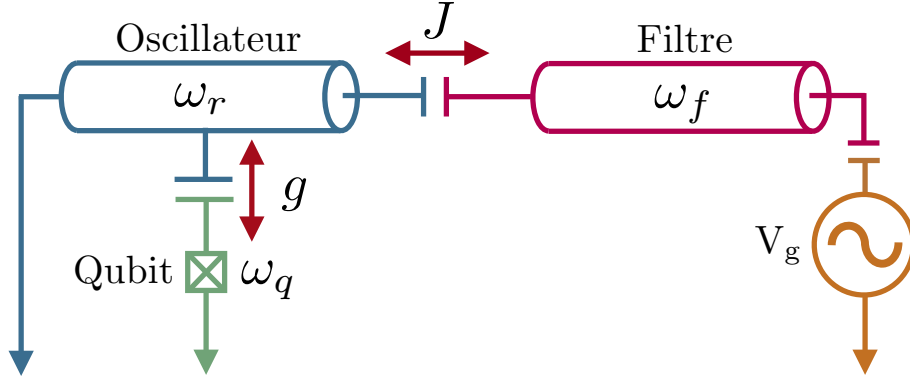


FIGURE 2.10 – Montage expérimental d'un système transmon-oscillateur protégé par un filtre agissant comme un deuxième filtre passe-bande. Les fréquences du filtre et de l'oscillateur doivent être désaccordées de la fréquence du qubit. Cette figure est inspirée de la référence [30]

transformation de Bogoliubov, comme on l'a fait à la section (2.12), afin de découpler le système oscillateur-filtre. Cette transformation nous mène à l'hamiltonien

$$H_B = \omega_c c^\dagger c + \omega_d d^\dagger d + \omega_q b^\dagger b - \frac{E_C}{2} b^{\dagger 2} b^2 + g_c (c^\dagger b + c b^\dagger) + g_d (d^\dagger b + d b^\dagger). \quad (2.40)$$

Si les fréquences de l'oscillateur et du filtre sont approximativement égales, les nouveaux modes propres c et d sont les modes habillés de fréquences $\omega_r \pm J$. Sous les mêmes approximations que celles faites à la section (2.12) et en réduisant le transmon à un système à deux niveaux, l'hamiltonien effectif dans la base habillée s'écrit

$$H_{Bd} = \tilde{\omega}_c c^\dagger c + \tilde{\omega}_d d^\dagger d + \frac{\tilde{\omega}_q}{2} \sigma_z + \chi_c c^\dagger c \sigma_z + \chi_d d^\dagger d \sigma_z, \quad (2.41)$$

où χ_c et χ_d sont les décalages AC de Stark des deux modes. On peut finalement revenir dans le référentiel où les deux oscillateurs ne sont pas habillés ensemble pour obtenir l'hamiltonien effectif suivant :

$$H_{eff} = \tilde{\omega}_r a^\dagger a + \tilde{\omega}_f f^\dagger f + \frac{\tilde{\omega}_q}{2} \sigma_z + \chi \sigma_z a^\dagger a + J (a^\dagger f + a f^\dagger) + \epsilon(t) \cos(\omega_p t) (f + f^\dagger) \quad (2.42)$$

où $\tilde{\omega}_r$ et $\tilde{\omega}_f$ sont les fréquences des deux oscillateurs renormalisées par leur couplage

au qubit et où on a ajouté l'hamiltonien de la source micro-onde.

Afin de trouver le taux Purcell dans ce système, on applique les mêmes transformations sur le lindbladien. En utilisant l'approximation séculaire, on trouve que le lindbladien, dans la base utilisée pour écrire l'hamiltonien (2.42) s'écrit

$$\mathcal{L}_{eff}(\rho) = \kappa \mathcal{D}[f]\rho + \gamma_p \mathcal{D}[\sigma_-]\rho \quad (2.43)$$

où le nouveau taux Purcell est donné par

$$\gamma_p = \frac{\kappa g^2 J^2}{(\Delta_{rq}\Delta_{fq} - J^2)^2}. \quad (2.44)$$

Il est nécessaire de choisir les paramètres du circuit afin que la relaxation du qubit ne soit pas dominée par cet effet. Une expression semblable à l'Éq. (2.44) est calculée à la Réf. [31] en utilisant un espace de Hilbert réduit à 2 niveaux par système. Les deux expressions sont égales dans les régimes où elles sont valides.

2.5.2 Déplacement dans l'espace des phases

À partir de l'hamiltonien de l'Éq. (2.38) et du lindbladien de l'Éq. (2.39), il est possible de prédire le déplacement des champs classiques conditionnellement à l'état du qubit. Comme on l'a fait à la section (2.3.1), on déplace l'hamiltonien effectif et on trouve que les états cohérents se déplacent selon les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} 0 = \ddot{\zeta} + \left[\frac{\kappa}{2} + i(\Delta_{fd} + \Delta_{rd} + \chi\sigma_z) \right] \dot{\zeta} + \left[J^2 + i\frac{\kappa}{2}(\Delta_{rd} + \chi\sigma_z) - \Delta_{fd}(\Delta_{rd} + \chi\sigma_z) \right] \zeta \\ + i\dot{\epsilon}(t) - \epsilon(t)(\Delta_{rd} + \chi\sigma_z), \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} 0 = \ddot{\alpha} + \dot{\alpha} \left(i(\Delta_{rd} + \Delta_{fd} + \chi\sigma_z) + \frac{\kappa}{2} \right) + \alpha \left(J^2 + \frac{i\kappa}{2}(\Delta_{rd} + \chi\sigma_z) - \Delta_{fd}(\Delta_{rd} + \chi\sigma_z) \right) \\ + J\epsilon(t) \end{aligned} \quad (2.46)$$

où $\alpha(t)$ et $\zeta(t)$ sont les déplacements des champs classiques dans l'oscillateur et dans le filtre. De leur côté, Δ_{rd} et Δ_{fd} sont les désaccords entre l'oscillateur et la source et entre le filtre et la source, respectivement. En passant dans le domaine de Laplace, il est possible de résoudre ces équations différentielles. On trouve alors que l'expression pour le champ dans le filtre respecte l'équation

$$\zeta(t) = \int_0^t d\tau \epsilon(\tau) \left[-i \cosh \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \tau \right) - 2 \frac{\frac{i\kappa}{2} + \Delta_{rf} + \chi}{\sqrt{\Delta}} \sinh \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \tau \right) \right] e^{-[\frac{\kappa}{4} + \frac{i}{2}(\Delta_{fd} + \Delta_{rd} + \chi)]\tau}, \quad (2.47)$$

tandis que le champ dans l'oscillateur de mesure suit l'équation

$$\alpha(t) = -\frac{2J}{\sqrt{\Delta}} \int_0^t d\tau \epsilon(\tau) \sinh \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \tau \right) e^{-[\frac{\kappa}{4} + \frac{i}{2}(\Delta_{fd} + \Delta_{rd} + \chi)]\tau}, \quad (2.48)$$

avec

$$\Delta = 4(\Delta_{rd} + \chi) + \left(\frac{\kappa}{2} + i(\Delta_{rd} + \Delta_{fd} + \chi) \right)^2. \quad (2.49)$$

Ces expressions sont plus complexes que l'Éq. (2.20) qui est valide pour une mesure réalisée avec un seul oscillateur. En effet, la fonction hyperbolique est alors absente dans l'intégrale donnant $\alpha(t)$.

En présence d'un filtre, puisque $\sinh(0)$ est nul, un délai existe entre le moment où un pulse est appliqué sur le filtre et le moment où l'oscillateur contient beaucoup de photons. Ce délai diminue si le couplage J entre les deux cavités augmente. Afin d'optimiser la mesure avec un filtre Purcell, ces équations pourraient être tenues en compte dans des procédures d'optimisation numérique [32]. Ces expressions permettent également de trouver la vitesse de déphasage induite par la mesure du qubit. Présentée en annexe A.2, la transformation de Polaron permet de trouver que l'expression pour le déphasage est la même que celle dérivée pour le même système sans filtre dans [26].

2.6 Résumé de chapitre

En conclusion, ce chapitre dresse un portrait de l'état actuel de la mesure transverse en présentant son mécanisme et ses inconvénients. À la section (2.4.1), je donne une piste de solution à une question non résolue du domaine. Je suggère en effet que le couplage entre les états logiques et les états ionisés du transmon, lorsque des photons sont ajoutés à l'oscillateur, pourrait expliquer la diminution prématurée de la fidélité de mesure avec la puissance de la source micro-onde. Malheureusement, la vérification de cette hypothèse avec des simulations complètes de la mesure est complexe et n'a pu être faite dans le cadre de mes études. Finalement, je montre comment on peut obtenir l'hamiltonien effectif du système transmon-oscillateur-filtre en effectuant une transformation dispersive. Les équations du mouvement obtenues peuvent être utilisées pour optimiser le pulse de mesure. Ces équations du mouvement sont plus complexes qu'en l'absence de filtre et ralentissent la dynamique de mesure. Le chapitre suivant s'attarde à une manière de mesurer qui ne nécessite pas l'ajout d'un filtre Purcell : la mesure longitudinale.

Chapitre 3

Mesure basée sur le couplage inductif

Le couplage transverse permet de mesurer un qubit supraconducteur avec une fidélité de 99% en moins de 100 nanosecondes [19]. Malgré qu'ils soient impressionnants, ces chiffres ne sont malheureusement pas suffisants pour construire un ordinateur quantique universel si l'on prend en compte les temps de vie d'environ 100 microsecondes des transmons actuels. Par ailleurs, la performance de ce type de mesure a plafonné tant au niveau de la vitesse et de la fidélité qu'au niveau de l'aspect QND. Un changement de paradigme semble donc nécessaire pour continuer à améliorer la mesure des qubits supraconducteurs et une idée prometteuse est le couplage inductif [3, 33, 34]. En théorie, ce dernier permet de contourner certaines difficultés rencontrées par le couplage transverse. Dans ce chapitre, on présente une étude numérique et analytique d'une implémentation de ce type de couplage dont des réalisations expérimentales sont en cours de développement dans deux groupes expérimentaux. Les réalisations expérimentales sont décrites au chapitre suivant.

3.1 Mesure idéale

Un ordinateur quantique utile requiert que plusieurs portes logiques puissent être réalisées en un temps beaucoup plus court que les temps de décohérence et de relaxation des qubits. Les mesures, qui permettent par exemple de faire de la correction d'erreur quantique, doivent également être rapides par rapport aux temps caractéristiques des qubits. Idéalement, la mesure d'un qubit est donc rapide, QND (voir section 2.3.3) et d'une grande fidélité. L'hamiltonien longitudinal, donné par

$$H_L = \omega_r a^\dagger a + \omega_q \frac{\sigma_z}{2} + g_z(t) (a + a^\dagger) \sigma_z, \quad (3.1)$$

satisfait théoriquement ces trois conditions. Le terme de couplage de l'Éq. (3.1) est dit longitudinal puisqu'il dépend seulement du degré de liberté σ_z du qubit. Si $g_z(t)$ est modulé à la fréquence de l'oscillateur, l'hamiltonien dans le référentiel tournant et sous l'approximation séculaire prend la forme

$$H = \omega_q \frac{\sigma_z}{2} + \tilde{g}_z (a + a^\dagger) \sigma_z, \quad (3.2)$$

où \tilde{g}_z est l'amplitude de la modulation. Cet hamiltonien génère donc une séparation rectiligne et de vitesse proportionnelle à \tilde{g}_z des états cohérents sur l'axe réel de l'espace des phases. Introduit en 2015 par le groupe théorique de Sherbrooke [3], l'hamiltonien longitudinal promet donc une dynamique idéale de séparation des états pointeurs. Sur la figure (3.1), cette dynamique est comparée à la dynamique dispersive qu'on obtient lorsqu'on utilise le couplage capacitif et aucune modulation du pulse micro-onde. Les marqueurs rouges positionnés à des intervalles de temps réguliers montrent que la séparation induite par l'hamiltonien longitudinal est plus rapide pour des temps courts.

L'aspect QND et la haute fidélité d'une mesure réalisée avec l'hamiltonien de l'Éq. (3.1) s'expliquent quant à eux par le fait que le terme de couplage commute avec l'hamiltonien du qubit isolé. Les états propres du qubit ne sont donc pas habillés par l'oscillateur et l'absence d'effet Purcell en découle naturellement. Par ailleurs, le nombre de photons ajoutés à l'oscillateur n'induit aucun mélange entre les niveaux logiques du qubit et aucune relaxation du qubit. Des mesures rapides à haute puissance sont donc possibles.

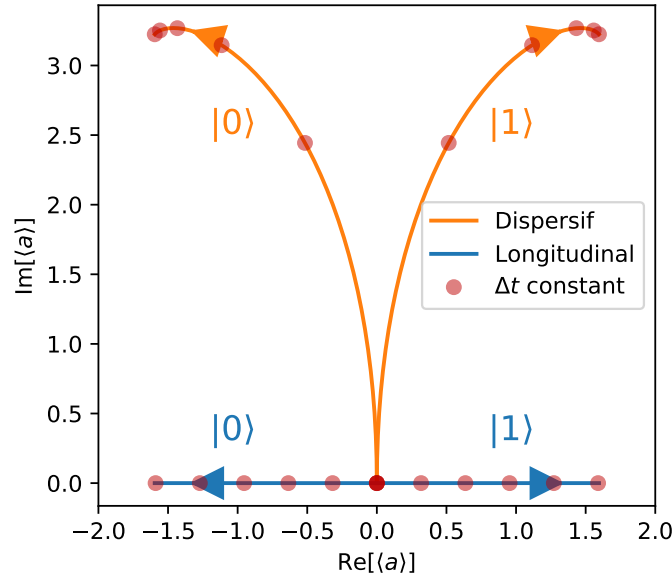


FIGURE 3.1 – Dynamique longitudinale en comparaison avec la dynamique dispersive. La séparation est plus rapide dans le cas idéal.

À la section (2.3.1), j'explique que si l'on déplace rapidement le champ dans l'oscillateur d'un circuit décrit par l'hamiltonien dispersif, on obtient l'hamiltonien longitudinal (voir Éq. 2.21). Cependant, la dynamique conserve son aspect rectiligne seulement pour les premiers instants de la séparation des états pointeurs après quoi, le déplacement initialement purement imaginaire gagne une composante réelle qui induit une rotation des états cohérents dans l'espace des phases. Toutefois, plus le déplacement initial est grand, plus la dynamique de séparation conserve son aspect rectiligne longtemps. Si l'amplitude du champ est suffisamment grande, il est donc possible d'obtenir la dynamique longitudinale à partir de l'hamiltonien dispersif pendant toute la mesure. Malheureusement, le nombre de photons critique n_{crit} , présenté à la section (2.4), fait en sorte que l'amplitude du champ doit demeurer petite lorsque le transmon est couplé capacitivement à l'oscillateur ce qui explique que la dynamique longitudinale ne peut pas être obtenue à partir du couplage transverse.

Dans ce chapitre, on présente un circuit qui implémente l'hamiltonien dispersif sans habiller le transmon et l'oscillateur ensemble. On évite ainsi les désavantages du couplage transverse et on montre qu'on peut induire un champ dans l'oscillateur avec une amplitude suffisamment grande pour obtenir la dynamique longitudinale.

3.2 Implémentation par couplage inductif

3.2.1 Circuit et hamiltonien

Obtenir un couplage qui dépend seulement de σ_z dans une réalisation expérimentale est difficile. L'idée introduite dans [33, 34] suggère de coupler la boucle SQUID d'un transmon au flux magnétique généré par un système quantique agissant comme pointeur, tel un résonateur coplanaire. Avec un tel couplage, on s'attend intuitivement à coupler le moment conjugué du transmon, $\cos(\theta)$, au moment conjugué de l'oscillateur. Si l'on approxime le transmon à un système à deux niveaux, $\cos(\theta)$ devient la matrice de Pauli σ_z .

Le groupe de l'institut Néel à Grenoble a déjà étudié expérimentalement un circuit, illustré à la figure (3.2), qui réalise ce type de couplage [1, 2]. Comme on peut le noter, il contient un oscillateur harmonique (en bleu) et un transmon (en vert). Le couplage inductif entre les deux systèmes émerge du partage d'une partie de l'inductance de l'oscillateur avec la boucle SQUID du transmon. La source micro-onde (en orange), permet d'ajouter des photons à l'oscillateur. L'hamiltonien de ce circuit s'écrit

$$H = \frac{p_\Phi^2}{2C_\Phi} + \frac{\Phi^2}{2L_\Phi} + \frac{p_\Theta^2}{2C_\Theta} - E_J \cos \left[\frac{2\pi}{\Phi_0} \left(\Theta + \frac{\Phi_x}{2} \right) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{\Phi_0} \left(\eta\Phi - \frac{\Phi_x}{2} \right) \right] + H_p, \quad (3.3)$$

où Φ et Θ sont respectivement les coordonnées des modes de l'oscillateur et du qubit. La coordonnée Φ décrit le mode où les flux de noeud Φ_A et Φ_B , de la figure (3.2), oscillent de manière antisymétrique, tandis que la coordonnée Θ décrit le mode où les deux flux de noeud oscillent symétriquement de sorte que

$$\Phi = \frac{\Phi_A + \Phi_B}{2} \quad \Theta = \frac{\Phi_A - \Phi_B}{2}. \quad (3.4)$$

De son côté, le ratio de participation η dépend de la fraction de l'inductance totale du mode de l'oscillateur qui est partagée avec la boucle SQUID du transmon. Ce paramètre contrôle la force du couplage inductif et apparaît naturellement dans les réalisations expérimentales du circuit qui sont présentées au chapitre 4.

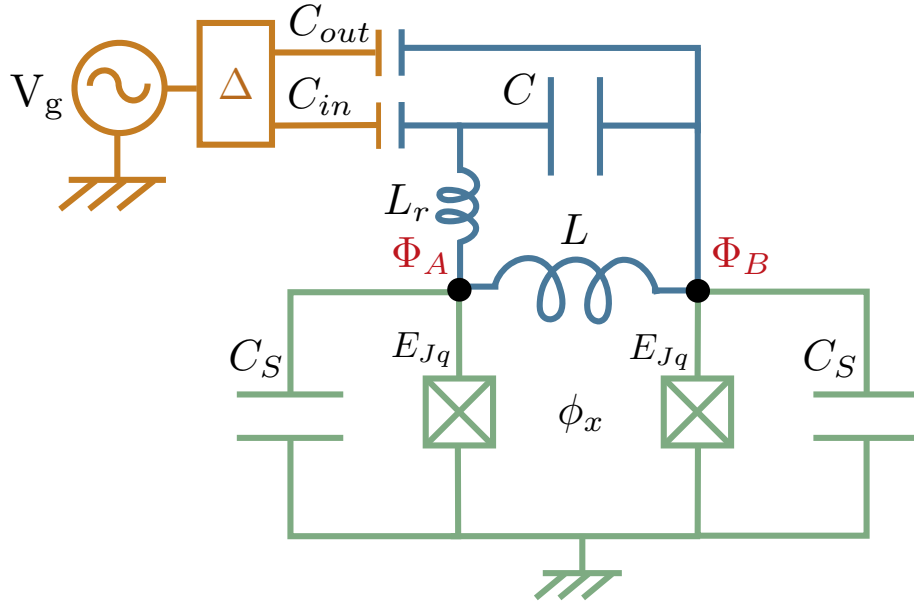


FIGURE 3.2 – Réalisation possible de l'hamiltonien longitudinal par couplage inductif. En orange, la source micro-onde permet l'ajout de photons à l'oscillateur. Le carré indiqué par Δ permet de déphaser le signal envoyé vers la capacité C_{in} par rapport à celui envoyé sur la capacité C_{out} , de sorte que le degré de liberté de l'oscillateur puisse être modulé. L'oscillateur et le transmon occupent les espaces colorés en bleu et en vert.

Dans l'hamiltonien de l'Éq. (3.3), la variable Φ_x est le flux externe qui passe dans la boucle SQUID du transmon et la valeur de E_J est deux fois celle de E_{Jq} illustré à la figure (3.2). Afin d'étudier cet hamiltonien analytiquement, on utilise les opérateurs d'échelles pour obtenir

$$H = \omega_r a^\dagger a + \sqrt{\frac{E_J E_C}{2}} (b - b^\dagger)^2 - E_J \cos \left[\bar{\theta} (b + b^\dagger) - \frac{\phi_x}{2} \right] \cos \left[\bar{\phi} (a + a^\dagger) + \frac{\phi_x}{2} \right] + H_p, \quad (3.5)$$

où,

$$\bar{\phi} = \frac{2\pi}{\phi_0} \sqrt{\frac{\hbar Z_r}{2}} \eta \quad \text{et} \quad \bar{\theta} = \left(\frac{2E_C}{E_J} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (3.6)$$

À nouveau, la lettre a est utilisée pour le mode de l'oscillateur et la lettre b pour le mode du transmon. Ici, Z_r est l'impédance du mode de l'oscillateur et la lettre ϕ_x

minuscule est utilisée pour signifier qu'elle absorbe la constante $\frac{2\pi}{\phi_0}$ comme à la section (1.2.1).

3.2.2 Modulation du flux externe

À partir de l'hamiltonien de l'Éq. (3.5), il est possible de s'approcher de l'hamiltonien longitudinal de l'Éq. (3.1) en modulant le flux externe dans la boucle du SQUID à la fréquence de l'oscillateur. Pour bien comprendre l'effet de cette modulation, on peut réécrire le terme de couplage de l'hamiltonien (3.5) en séparant le flux ϕ_x de la coordonnée de l'oscillateur afin d'obtenir

$$H_C = -E_J \cos \left[\bar{\theta} (b + b^\dagger) - \frac{\phi_x}{2} \right] \left\{ \cos [\bar{\phi} (a + a^\dagger)] \cos \frac{\phi_x}{2} + \sin [\bar{\phi} (a + a^\dagger)] \sin \frac{\phi_x}{2} \right\}, \quad (3.7)$$

Si ϕ_x est modulé avec une petite amplitude à la fréquence propre du mode ϕ autour du point $\phi_x = 0$, une expansion au premier ordre des fonctions trigonométriques de l'Éq. (3.7) permet d'obtenir l'hamiltonien longitudinal avec

$$g_z(t) = E_J \frac{\bar{\theta}^2}{2} \bar{\phi} \frac{\phi_x(t)}{2}. \quad (3.8)$$

L'inconvénient de cette approche est que la phase du potentiel du transmon est également modulé pendant la mesure. Il est donc nécessaire de désaccorder le transmon de l'oscillateur afin d'éviter que cette modulation ne génère des transitions non souhaitées du qubit.

3.2.3 Pompage cohérent de l'oscillateur

Une deuxième manière d'obtenir l'hamiltonien longitudinal de l'Éq. (3.1) est de pomper directement le mode Φ en fixant le flux externe ϕ_x à 0. La génération de l'état cohérent $|\alpha(t)\rangle$ dans l'oscillateur déplace la coordonnée ϕ d'une valeur donnée par

$$\phi_\alpha = 2\bar{\phi} \text{Re} [\alpha(t)] \quad (3.9)$$

et l'hamiltonien de couplage peut se réécrire comme

$$H_C = -E_J \cos [\bar{\theta} (b + b^\dagger)] \{ \cos [\bar{\phi} (a + a^\dagger)] \cos \phi_\alpha + \sin [\bar{\phi} (a + a^\dagger)] \sin \phi_\alpha \}. \quad (3.10)$$

Puisque ϕ_α oscille autour de 0 à la fréquence de l'oscillateur, le deuxième terme de l'expression de couplage est activé, comme à la dernière section, et on obtient à nouveau l'hamiltonien longitudinal. Cette approche n'entraîne pas la modulation de la phase du potentiel du transmon et elle sera donc favorisée à la précédente. Le flux externe ϕ_x sera nul dans le reste du chapitre.

3.2.4 Décomposition de l'hamiltonien de couplage

L'expansion aux premiers ordres des fonctions trigonométriques de l'hamiltonien (3.5) résulte en différents termes qui ont des effets plus ou moins importants sur la dynamique de la mesure longitudinale. Dans la section qui suit, on étudie la nature de ces effets selon le choix des différents paramètres du circuit.

En faisant l'expansion des cosinus au deuxième ordre, on trouve tout d'abord le terme

$$H_{Stark} = 2\chi a^\dagger a b^\dagger b \quad (3.11)$$

qui génère le décalage AC de Stark permettant la mesure du qubit. Comme dans le cas du couplage capacitif, on trouve que la fréquence de l'oscillateur subit un décalage égal à 2χ lorsque l'état du qubit change. L'amplitude de ce terme pour le circuit étudié est déterminée par

$$\chi = -\sqrt{\frac{E_J E_C}{2}} \frac{Z_r \eta^2 \pi^2}{2\phi_0^2}. \quad (3.12)$$

Contrairement au couplage capacitif, on note que le couplage inductif permet d'obtenir ce décalage sans avoir à habiller les systèmes ensemble. La présence de ce terme ne vient donc pas avec un nombre de photon critique au-dessus duquel la mesure QND du qubit est compromise. Par ailleurs, l'expression pour χ n'est pas inversement proportionnelle au désaccord entre les fréquences du qubit et de l'oscillateur contrairement à l'Éq.

(2.12). Cette caractéristique permet de désaccorder fortement le qubit de l'oscillateur sans compromettre la vitesse de la mesure.

L'expansion des cosinus fait apparaître d'autres termes nuisibles pour la mesure et il est important d'étudier leurs effets afin de s'assurer que le couplage inductif préserve un grand avantage sur le couplage capacitif. Premièrement, le terme

$$H_{Kerr} = \frac{K}{2} (a^\dagger a)^2 \quad (3.13)$$

est responsable du changement de la fréquence de résonance de l'oscillateur en fonction de l'amplitude du champ qu'il contient. Ici, K est la grandeur du changement de fréquence de résonance de l'oscillateur lorsqu'un photon y est ajouté. Dans l'hamiltonien (3.3), on retrouve ce terme au quatrième ordre de l'expansion du cosinus de l'oscillateur et

$$K = -E_J \frac{\bar{\phi}^4}{4}. \quad (3.14)$$

Si beaucoup de photons sont ajoutés à l'oscillateur, les termes d'ordres supérieurs doivent également être considérés. Il est important de considérer cet effet afin de bien choisir la fréquence à laquelle on pompe l'oscillateur. Avec les paramètres réalistes choisis pour réaliser les simulations présentées dans ce chapitre, la constante K vaut environ 1.4 MHz. Si l'on ajoute 50 photons à l'oscillateur, la fréquence est donc décalée d'environ 70 MHz.

La majorité des termes dans l'expansion du cosinus de l'oscillateur, dont le terme Kerr de l'Éq. (3.13), peut déformer l'état cohérent dans l'oscillateur. La déformation inclut tous les effets qui éloignent l'état de l'oscillateur d'un état cohérent et elle peut, en théorie, réduire la fidélité si elle augmente le chevauchement entre les états pointeurs. La déformation augmente avec la puissance de mesure et pourrait, de prime abord, être le facteur limitant le nombre de photons moyen qu'on peut utiliser pour réaliser la mesure.

Finalement, les termes donnés par

$$H_{Fuite} = -\frac{\chi}{2} (a + a^\dagger)^2 (b + b^\dagger)^2 \quad (3.15)$$

contribuent à transférer une partie de la population du transmon en dehors des niveaux logiques $|0\rangle$ et $|1\rangle$ lorsque des photons sont ajoutés à l'oscillateur. Avec la théorie des perturbations, on montre en effet que ce terme mène à des oscillations d'une partie de la population du transmon entre les états logiques et les états supérieurs de ce dernier. Par exemple, si le qubit est initialisé dans l'état $|0\rangle$, une fraction de la population oscillera au premier ordre entre l'état logique $|0\rangle$ et l'état $|2\rangle$ selon l'équation

$$L_{0\leftrightarrow 2}(t) = |\langle i(t)|2\rangle|^2 = 8\chi^2 \left| \int_0^t \alpha_i^2(\tau) e^{i\omega_{02}(\tau)\tau} \cos^2(\omega_r\tau) d\tau \right|^2, \quad (3.16)$$

où $\alpha_i(t)$ est l'amplitude de l'état cohérent dans le référentiel tournant. Si le qubit est initialisé dans l'état $|1\rangle$, une partie de la population oscillera au premier ordre entre l'état logique $|1\rangle$ et l'état $|3\rangle$ selon l'équation

$$L_{1\leftrightarrow 3}(t) = |\langle i(t)|3\rangle|^2 = 24\chi^2 \left| \int_0^t \alpha_i^2(\tau) e^{i\omega_{13}(\tau)\tau} \cos^2(\omega_r\tau) d\tau \right|^2. \quad (3.17)$$

Ici, ω_{02} et ω_{13} sont les fréquences des transitions $0 \rightarrow 2$ et $1 \rightarrow 3$ du transmon. Si le contenu en fréquence de $\alpha_i(t)$ est suffisamment faible aux fréquences ω_r et ω_q , l'amplitude des oscillations décrites par $L_{0\leftrightarrow 2}(t)$ et $L_{1\leftrightarrow 3}(t)$ sont respectivement données par les expressions

$$A_{0\leftrightarrow 2} = \frac{8\chi^2 \alpha_i^4(t)}{(2\omega_r)^2 - \omega_{02}^2} \quad \text{et} \quad A_{1\leftrightarrow 3} = \frac{24\chi^2 \alpha_i^4(t)}{(2\omega_r)^2 - \omega_{13}^2} \quad (3.18)$$

On obtient ces amplitudes en évaluant approximativement les intégrales des Éq. (3.16) et (3.17). Pour des fréquences de ω_r et de ω_q d'environ 5 GHz, les Éq. (3.18) commencent à perdre leur validité si α_i passe de 0 à une valeur près de 1 en moins de 1 ns. On doit donc éviter d'utiliser des pulses qui induisent des déplacements aussi rapides de l'état cohérent. L'annexe (A.1) détaille le calcul de ces expressions. Puisqu'on souhaite limiter ces oscillations, il est important de s'assurer du désaccord entre les fréquences des transitions à deux photons du transmon et de l'oscillateur.

Les niveaux excités par la mesure ne se limitent pas aux niveaux 2 et 3. Si l'on fait l'expansion des cosinus aux ordres supérieurs, on remarque que plusieurs termes

d'échanges de la forme

$$H_{\text{échange}} \propto (a^{\dagger m} a^n b^{\dagger l} b^k + h.c.) \quad (3.19)$$

existent et qu'ils peuvent devenir importants si des résonances entre les niveaux ont lieu. Cependant, puisque les cosinus sont des fonctions paires, les valeurs de $m - n$ et de $l - k$ sont paires aussi et seuls des échanges de nombres pairs de photons sont possible entre le transmon et l'oscillateur. Ainsi, les niveaux excités du transmon pendant une mesure avec beaucoup de photons ont la même parité que l'état initial du transmon. L'avantage de cette dynamique de fuite est qu'aucun mélange ne survient entre les niveaux logiques du qubit. On discutera à nouveau de la fuite des niveaux logiques en analysant les simulations numériques présentées à la prochaine section.

Enfin, pour les paramètres conventionnels du transmon et de l'oscillateur, la fuite est le phénomène qui limite la puissance de mesure. Les simulations révèlent en effet que le phénomène de déformation des états pointeurs les éloigne très peu d'états cohérents.

3.2.5 Étude numérique

Afin de s'assurer que les effets indésirables détaillés à la section précédente ne gêne pas l'obtention d'une bonne mesure, il est essentiel de réaliser des simulations en considérant l'entièreté de l'hamiltonien du circuit (3.2) donné par

$$H = H_r + H_q + E_J \left\{ \cos \left[\bar{\phi} (a + a^\dagger) \right] - 1 \right\} (\cos \theta - 1) + H_p \quad (3.20)$$

où H_r et H_q sont les hamiltoniens non linéaires du résonateur et du transmon

$$H_r = \omega_r a^\dagger a + \sum_{n=2}^{\infty} \bar{\phi}^{2n} \frac{(a + a^\dagger)^{2n}}{(2n)!}, \quad (3.21)$$

$$H_q = 4E_C n^2 - E_J \cos \theta, \quad (3.22)$$

$$H_p = \epsilon(t) \cos(\omega_p t) (a + a^\dagger). \quad (3.23)$$

Le but principal de cette étude numérique est de déterminer l'effet d'une mesure avec un grand nombre de photons moyen sur l'état du transmon. Ce grand nombre de photons moyen est nécessaire pour obtenir la dynamique de la mesure longitudinale. Réaliser des simulations dans lesquelles la valeur de $\langle a^\dagger a \rangle$ s'approche de 10^2 n'est cependant pas facile. En effet, si l'hamiltonien (3.20) est simulé tel quel, la taille de l'espace de Hilbert nécessaire, $\sim 10^3 \times 10^3$, devient trop grande pour la mémoire de l'ordinateur. Une astuce qui permet de réduire la taille de l'espace de Hilbert est de réaliser la simulation dans un référentiel où l'oscillateur demeure près de l'état du vide. Si le référentiel suit bien la valeur moyenne de l'opérateur a et que l'état de l'oscillateur demeure près de celui d'un état cohérent, moins de 10 niveaux sont nécessaires. Pour y arriver, il suffit d'appliquer la transformation de déplacement (1.11) à l'équation maîtresse du système. Évidemment, le paramètre de l'état cohérent $\alpha(t)$ doit être approximé analytiquement. Pour y arriver, on utilise l'expression (2.20) présentée à la section (2.3.1).

Dans les simulations numériques, on utilise également des formes de pulse permettant l'ajout rapide de photons dans l'oscillateur (voir section 2.3.1). La figure (3.3) présente la forme du pulse utilisé et le déplacement résultant dans l'espace des phases de l'oscillateur. Comme on peut le voir, la mesure est constituée de trois étapes identifiées par les lettres i), ii) et iii). Premièrement, un pulse d'une durée de 5 ns visant à générer un état cohérent avec une amplitude précise est appliqué par la source micro-onde. Ensuite, en ii), l'oscillateur est modulé à un taux constant pour que l'état cohérent généré en i) conserve la même amplitude malgré la dissipation. Au cours de cet intervalle, l'état cohérent dans l'oscillateur accumule une phase qui dépend de l'état du qubit. Finalement, en iii), lorsque suffisamment d'information a été accumulée sur l'état du qubit, un pulse de réinitialisation est appliqué à l'oscillateur. Afin de revenir à l'état du vide, l'information acquise sur l'état du qubit est utilisée pour déterminer le signe de la partie imaginaire du pulse.

L'étape i) sert en fait à déplacer la variable ϕ le plus rapidement possible vers la valeur ϕ_α donnée à l'Éq. (3.9). Comme on peut le voir sur la figure (3.3), suite à ce déplacement rapide, la dynamique de séparation des états pointeurs dans l'espace des phases s'approche de la dynamique longitudinale. De plus, la vitesse de séparation est

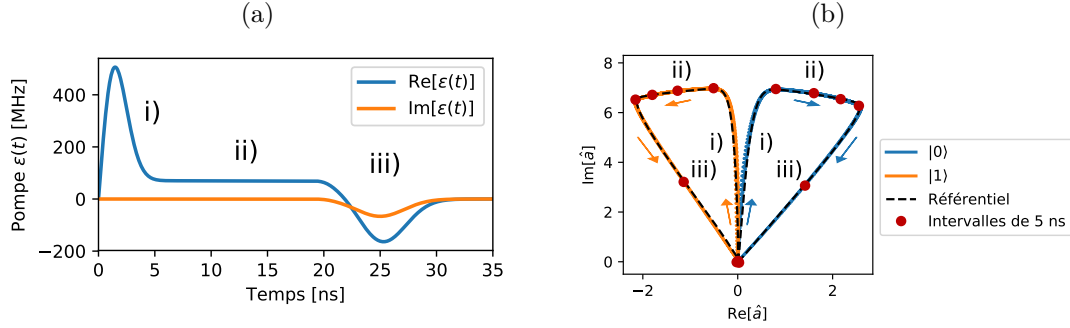


FIGURE 3.3 – (a) Forme du pulse appliqué par la pompe optique pendant la mesure. Les 3 étapes identifiées par i), ii) et iii) permettent de faire une mesure rapide et de réinitialiser l'oscillateur. (b) Déplacement des états cohérents dans l'espace des phases dépendamment de l'état initial du qubit. Les courbes orange et bleues sont le résultat des simulations de l'hamiltonien complet. Les courbes pointillées montrent les référentiels de déplacement utilisés pour la réalisation de ces simulations. Finalement, les points rouges sont placés à chaque intervalle de 5 ns.

proportionnelle à l'amplitude de α_i de l'état cohérent dans l'oscillateur et on optimise la mesure en choisissant le plus grand α_i qui ne compromet ni la fidélité ni l'aspect QND.

Comme expliqué au chapitre 1, la base permettant de bien simuler le transmon est la base des charges. Cependant, de grandes matrices sont nécessaires pour arriver à bien le simuler, comme le montre la figure (1.6). Pour le simuler efficacement, on trouve premièrement la base qui diagonalise l'hamiltonien du transmon isolé avec 200 niveaux de charge. On trouve ensuite les opérateurs du transmon, n et $\cos \theta$, dans cette nouvelle base. Puisque la population du transmon demeure dans ses premiers états propres au cours de la mesure, on peut tronquer les niveaux dont la population demeure nulle. Dans les simulations réalisées pour cette étude, on tronque les niveaux au-dessus du quinzième. En utilisant une matrice densité 10×10 pour simuler l'oscillateur dans le référentiel déplacé, une matrice densité 150×150 doit être intégrée pour résoudre l'équation maîtresse du système oscillateur-transmon.

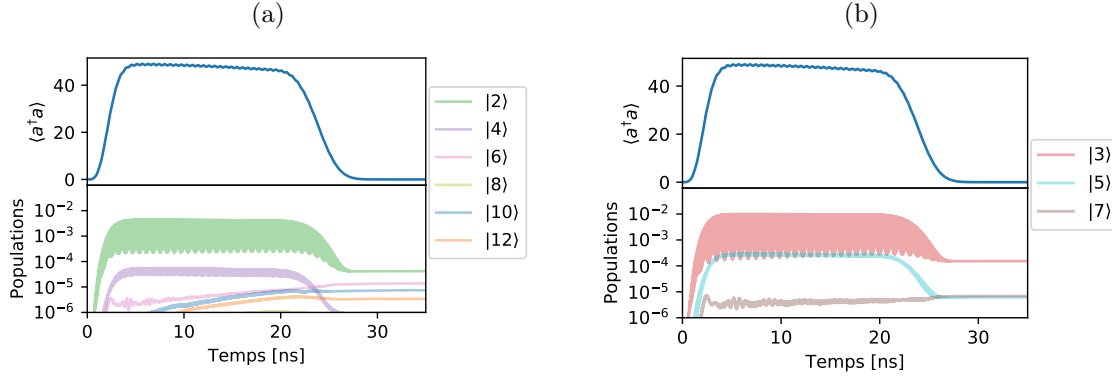


FIGURE 3.4 – Exemple de la fuite générée par l’ajout de photons dans l’oscillateur. Les courbes des graphiques du haut montrent le nombre moyen de photons dans l’oscillateur pendant la mesure. Les courbes du bas montrent la population des premiers états propres du transmon. Les figures (a) et (b) montrent respectivement des simulations lorsque le transmon est initialisé dans l’état fondamental et dans l’état excité. Les paramètres utilisés pour la simulation sont les suivants : $\omega_q/2\pi = 7$ GHz, $E_C/2\pi = 340$ MHz, $\omega_r/2\pi = 8$ GHz, $\kappa/2\pi = 20$ MHz, $\chi/2\pi = 5$ MHz et $\eta = 0.34$.

3.2.6 Fuite des niveaux logiques

La figure (3.4) présente la population de l’oscillateur et la population des premiers états propres du transmon pendant la mesure de ce dernier réalisée avec le pulse présenté à la figure (3.3). Comme prévu à la section (3.2.4), la parité des niveaux excités est conservée au cours de la mesure : si le qubit est initialisé dans son état fondamental, une partie de la population fuit vers des états pairs tandis que si le qubit est initialisé dans son état excité, la fuite s’effectue vers des niveaux impairs. Les équations (3.18) prédisent de leur côté que l’amplitude de ces oscillations est proportionnelle à α_i^4 . Lorsque l’oscillateur est réinitialisé, les populations fuyantes devraient donc revenir de manière cohérente vers les niveaux logiques du transmon. Sur la figure (3.4), on remarque que l’amplitude des oscillations perd en effet de 2 à 3 ordres de grandeur après la réinitialisation. La population restante peut être expliquée par le fait que α_i a un contenu en fréquence non nul autour de ω_q et ω_r (voir annexe A.1).

La figure (3.5) (a) présente l’amplitude des oscillations de fuite en fonction du nombre de photons moyen utilisé pour réaliser la mesure. Les courbes pointillées

sont les amplitudes données par les équations (3.18) qui surestiment légèrement les amplitudes trouvées numériquement à partir de l'intégration de l'équation maîtresse. La courbe pointillée rouge est placée devant le nombre critique de photons calculé avec l'expression (2.33) pour un hamiltonien de couplage capacitif permettant de réaliser une mesure aussi rapide qu'avec l'hamiltonien simulé. On voit qu'il est possible d'ajouter 5 fois plus de photons que n_{crit} avant que l'amplitude des oscillations n'atteigne 1%.

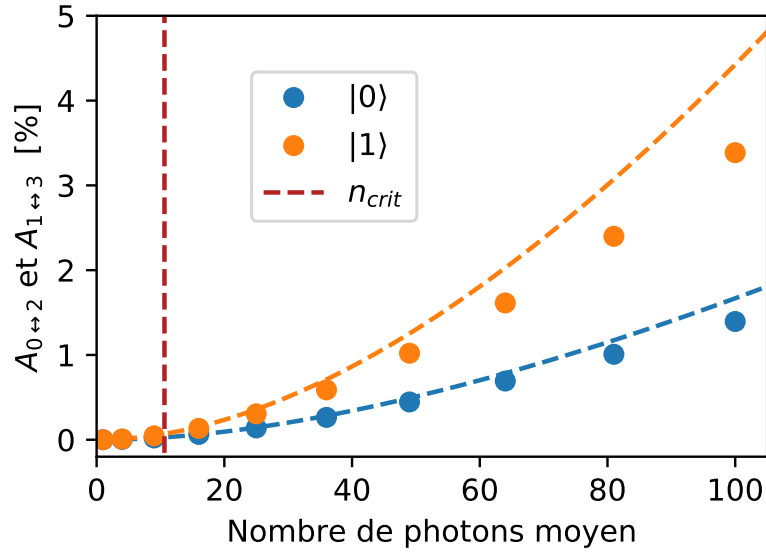


FIGURE 3.5 – Amplitude de la fuite vers les niveaux supérieurs pendant la mesure. Les courbes pointillées montrent la fuite calculée avec la théorie des perturbations qui surestime légèrement l'amplitude de la fuite par rapport aux simulations de l'équation maîtresse en orange et bleue. La courbe rouge pointillée est alignée avec le nombre critique de photons pour un hamiltonien de couplage transverse ayant les mêmes dynamiques de mesure.

3.2.7 Aspect QND et effet du déphasage

Les niveaux d'un transmon sont sujet à du déphasage et de la relaxation. Sous ces effets, lorsqu'on prépare le transmon dans une superposition de deux états propres, les éléments ρ_{ij} de la matrice densité du transmon ρ évolue selon les équations

$$\rho_{jj}(t) = \rho_{jj}(0)e^{-t/T_1^j}, \quad (3.24)$$

$$\rho_{ij}(t) = \rho_{ij}(0)e^{-t/T_2^{*ij}}, \quad (3.25)$$

Niveaux $i - j$	0 - 1	1 - 2	2 - 3	3 - 4
T_1^j [μs]	84	41	30	22
T_2^{*ij} [μs] $\pm 20\%$	72	32	12	< 2

TABLEAU 3.1 – T_1 et T_2 pour les différents niveaux du transmon selon la référence [35]

où T_1^j est le temps de vie du niveau j , T_2^{*ij} est le temps de cohérence de la superposition des niveaux i et j . On assume ici que $j > i$ et que la relaxation entraîne la population d'un niveau vers le niveau inférieur suivant. Généralement, on caractérise un qubit par la valeur de T_1^1 et de T_2^{*10} . Or, afin de bien inclure la relaxation et la décohérence dans des simulations où des superpositions de différents niveaux surviennent, chacun des T_2^{ij} et T_1^j doit être connu. La référence [35] présente des mesures de plusieurs de ces temps caractéristiques et le tableau (3.1) en donne un résumé.

À partir de ces mesures, on utilise une méthode détaillée à la section (A.3) pour construire les opérateurs dissipations utilisés dans les simulations. Cette méthode permet de trouver une approximation des temps de cohérence non mesurés dans la référence [35]. Par exemple, on trouve que les très importants temps de cohérence T_2^{*02} et T_2^{*13} valent respectivement 19 et 7 μs tandis que T_2^{*04} et T_2^{*15} valent 0.75 et 0.21 μs .

En présence de la décohérence, les oscillations décrites à la dernière section deviennent problématiques. En effet, la disparition de ces oscillations après la réinitialisation de l'oscillateur n'est possible que si ces dernières demeurent cohérentes tout au long de la mesure. Les courts temps de cohérence des niveaux supérieurs combinés à l'amplitude des oscillations de fuite participent donc à diminuer l'aspect QND de la mesure. La figure (3.6) montre comment l'aspect QND de la mesure évolue avec le nombre de photons moyen utilisé.

Plusieurs phénomènes expliquent l'aspect des courbes de la figure (3.6). La figure (3.7) qui présente la population finale de chaque état propre du transmon à la fin de la mesure permet de mieux les comprendre. On y voit premièrement que la relaxation n'augmente pas avec l'amplitude de la mesure. La diminution de l'aspect QND avec la puissance de mesure est donc entièrement dû à la fuite. Ensuite, le niveau vers lequel la population fuit le plus change avec la puissance de la mesure.

La figure (3.8) montre les énergies propres du système lorsqu'il contient entre 10

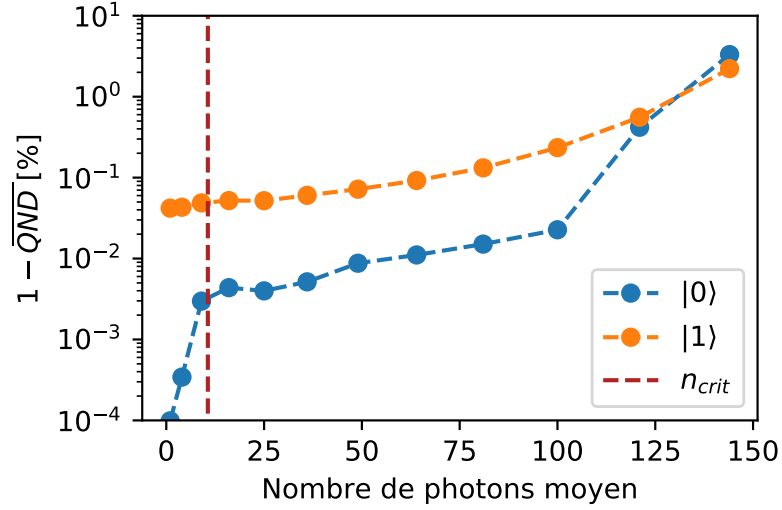


FIGURE 3.6 – Aspect QND des mesures réalisées à différentes puissances lorsqu’on inclut la relaxation et la décohérence. L’aspect non QND de la mesure augmente de manière générale avec la puissance.

et 13 photons et lorsqu’il contient entre 30 et 33 photons. On y voit, par exemple, qu’entre 10 et 20 photons, le niveau 0 est en résonance avec les niveaux 4 et 6 et que le niveau 1 est en résonance avec le niveau 7. Ceci explique le maximum local qu’atteint l’aspect non QND à cette puissance. En augmentant la puissance, ces résonances accidentelles disparaissent et d’autres apparaissent. En choisissant les paramètres du système, il est important de s’assurer que les énergies des états pairs, représentés par des cercles, soient éloignées des droites pointillées bleues et que les énergies des états impairs, représentés par des carrés, soient éloignées des lignes pointillées oranges. Cependant, ajouter des photons à l’oscillateur modifie la valeur effective de E_J et des résonances apparaissent et disparaissent à mesure qu’on ajoute des photons au système. On a choisi les paramètres du système simulé ici afin que les résonances avec les niveaux 4, 6 et 7 existent seulement à basse puissance, lorsque l’amplitude des oscillations est moins importante.

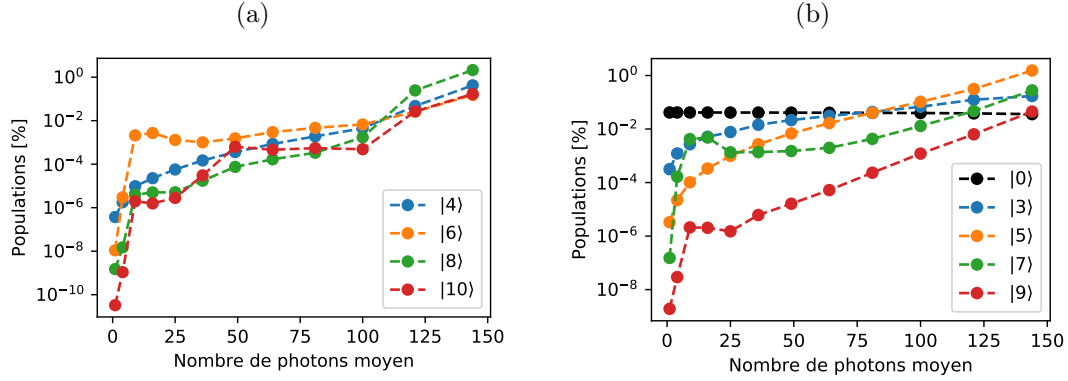


FIGURE 3.7 – Population des niveaux supérieurs du transmon après la mesure lorsque le qubit est initialisé (a) dans l'état $|0\rangle$ et (b) dans l'état $|1\rangle$. On remarque que la fuite des populations logiques change de destination à mesure qu'on augmente la puissance de mesure. Lorsqu'il est initialisé dans l'état $|1\rangle$, la population finale de l'état $|0\rangle$ dépend du taux de relaxation du qubit.

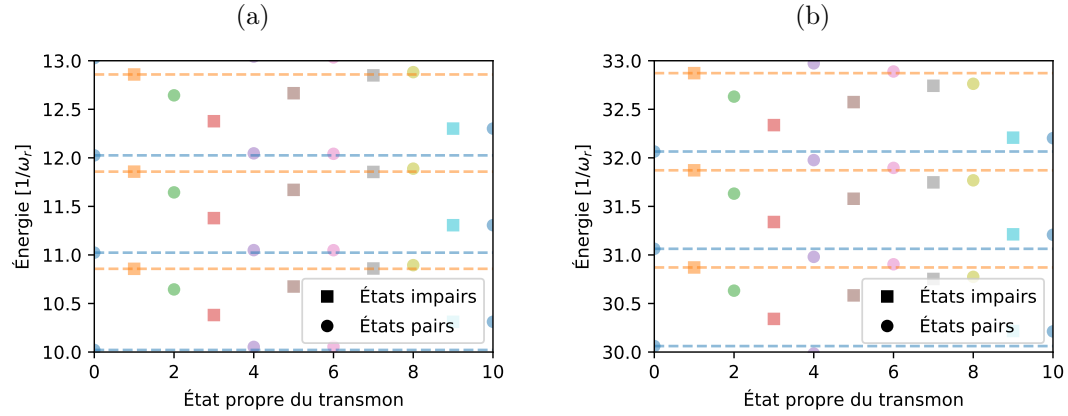


FIGURE 3.8 – Énergies propres de l'hamiltonien de couplage inductif lorsque le système contient (a) entre 10 et 13 photons et lorsqu'il contient (b) entre 30 et 33 photons. On voit qu'une résonance entre les niveaux 0, 4 et 6 et les niveaux 1 et 7 existe à environ 10 photons et est disparu à 30 photons.

La fidélité peut être calculée avec la borne inférieure donnée à l'équation (2.29). La figure (3.9) présente le temps nécessaire pour que la mesure atteigne une fidélité de 99.9% pour différents nombres de photons moyen utilisé (\bar{n}_p). En ordonnée, ce graphique présente l'aspect non QND pour chacune des mesures simulées. Les chiffres sont impressionnants : avec des temps caractéristiques réalistes pour le transmon, il est

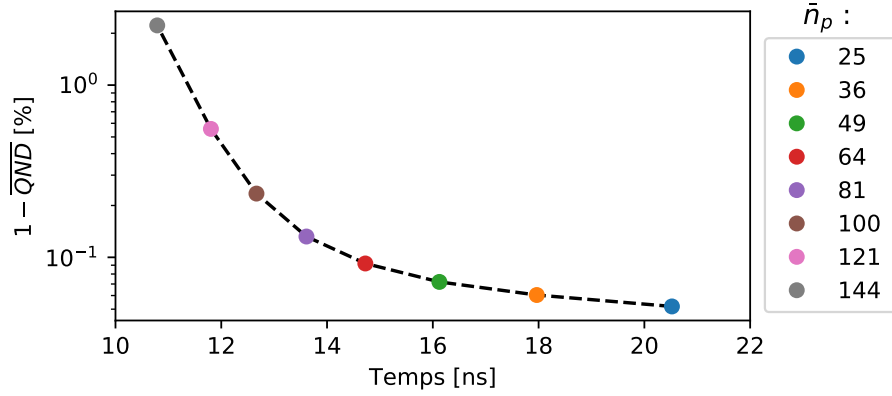


FIGURE 3.9 – Infidélité pendant la mesure pour différentes puissances caractérisées par le nombre de photons moyen. L’aspect QND, \overline{QND} , diminue lorsque la puissance de mesure augmente. L’effet du temps de relaxation n’est pas considéré.

possible d’obtenir une fidélité et un aspect QND au-dessus de 99.9% et ce, en moins de 15 ns. Si l’on utilise le nombre de photons critique pour l’hamiltonien transverse équivalent tracé dans les figures (3.5) (a) et (b), le temps nécessaire pour obtenir une telle fidélité monte à 84 ns. Une des conclusions les plus importantes de mon travail est donc qu’une mesure près de 6 fois plus rapide que la mesure conventionnelle pourrait être réalisée avec le circuit de couplage inductif.

3.2.8 Asymétrie entre les jonctions

Comme expliqué précédemment, le circuit considéré dans ce travail nécessite deux jonctions Josephson identiques. Expérimentalement, il est cependant inévitable qu’une différence existe entre les deux valeurs de E_{Jq} de telle sorte que l’hamiltonien de couplage devienne

$$H_c = 2\tilde{E}_J \cos(\theta) \cos(\bar{\phi} [a + a^\dagger]) - \Delta E_J \sin(\theta) \sin(\bar{\phi} [a + a^\dagger]), \quad (3.26)$$

où \tilde{E}_J et ΔE_J sont respectivement la valeur moyenne des deux énergies Josephson et leur différence. La constante δ sera utilisée pour désigner le rapport $\Delta E_J / 2\tilde{E}_J$. En faisant l’expansion au premier ordre des fonctions sinus, on s’aperçoit que le nouveau terme mène à un couplage de type transverse entre le transmon et l’oscillateur. On pourrait donc s’attendre, dans une réalisation expérimentale, à retrouver certains des

désavantages liés à l’habillage du transmon par l’oscillateur décrits à la section (2.4). L’amplitude du couplage transverse résultant est donnée par

$$g_{trans} = \delta 2E_J \bar{\phi} \bar{\theta} \quad (3.27)$$

et a une valeur entre 1 et 10 MHz lorsque $\delta = 1\%$ pour des paramètres de circuit sont réalistes. Ce couplage transverse résiduel est donc faible par rapport au désaccord de plus de 1 GHz entre la fréquence du qubit et celle de l’oscillateur. Il est possible de choisir un grand désaccord sans compromettre la vitesse de la mesure puisque χ n’est pas inversement proportionnel à Δ . En analysant l’effet de l’asymétrie dans le cas du circuit réalisé à l’institut Néel de Grenoble au chapitre 4, nous montrons que ce type de couplage diminue légèrement l’aspect QND pour des mesures à grand nombre de photons. Pour les paramètres du circuit de Grenoble, l’asymétrie de $\delta = 2.6\%$ réduit l’aspect QND de seulement 0.06%.

3.2.9 Absence d’anticroisement dans le spectre de charge

À la section (2.4.1), nous avons montré que l’ajout de photons à un oscillateur peut entraîner un couplage entre les niveaux logiques et les états ionisés si le couplage est transverse. Afin d’évaluer si ce type de couplage existe pour l’hamiltonien de couplage inductif, son spectre peut également être tracé en fonction du biais de charge n_g . En analysant les bandes du spectre, on s’aperçoit qu’il n’y a pas d’anticroisements entre les états ionisés et les états logiques du transmon. Il n’y aurait donc pas de couplage qui générerait de la fuite vers les états ionisés lors d’une mesure à grand nombre de photons. La figure (3.10) permet de se convaincre de l’absence de couplage en montrant les bandes des mêmes états qu’à la figure (2.7).

Bref, contrairement au couplage transverse, il ne semble pas y avoir de mécanisme favorisant l’excitation des états ionisés pendant la mesure. Ceci, combiné au fait qu’on peut ajouter entre 5 et 10 fois plus de photons que la valeur de n_{crit} tout en conservant l’aspect QND de la mesure permet de penser qu’une implémentation expérimentale de ce circuit pourrait éventuellement mener à la mesure QND la plus rapide jamais réalisée sur un qubit supraconducteur.

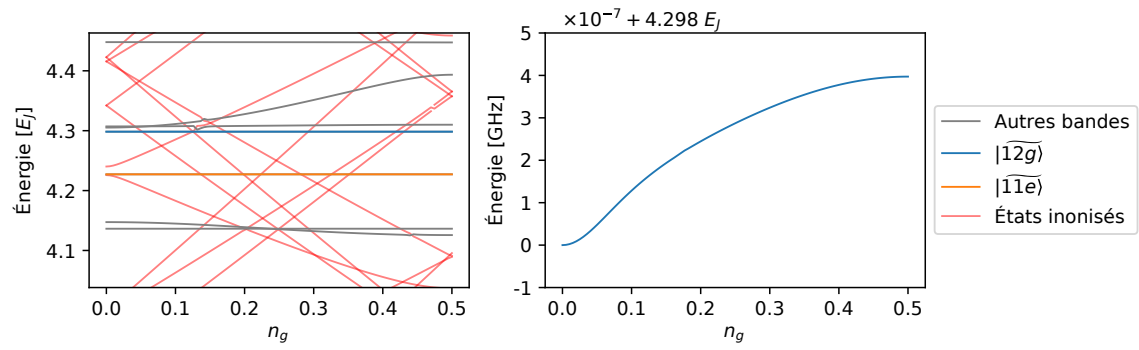


FIGURE 3.10 – Spectre de l'hamiltonien longitudinal à l'énergie des états $|\widetilde{12g}\rangle$ et $|\widetilde{11e}\rangle$. La figure de gauche montre l'absence d'anticroisements et donc, de couplage entre les états logiques et les états ionisés du transmon.

Chapitre 4

Implémentations expérimentales de la mesure longitudinale

Vers la fin de ma maîtrise, j'ai eu la chance d'analyser les réalisations expérimentales du couplage inductif de deux groupes expérimentaux. À l'institut Néel de Grenoble, on réalise la mesure par l'entremise d'une cavité 3D couplée de manière transverse au mode antisymétrique (Φ) du circuit présenté à la figure (3.2). On appelle ce mode antisymétrique le mode ancillaire. Sur ce dispositif, le groupe est déjà parvenu à réaliser des mesures sous les 100 ns. Ils travaillent encore à l'amélioration de ces résultats avant de les publier. De leur côté, le MIT opte pour une réalisation complètement 2D. Un résonateur coplanaire $\lambda/4$ est mis à la terre par l'entremise du circuit analysé au chapitre précédent. Aucune mesure rapide n'a encore été réussie, mais le dispositif a bien été compris et on s'attend à obtenir des résultats concluants lors de la prochaine itération de fabrication. Ces deux réalisations sont brièvement présentées dans ce chapitre.

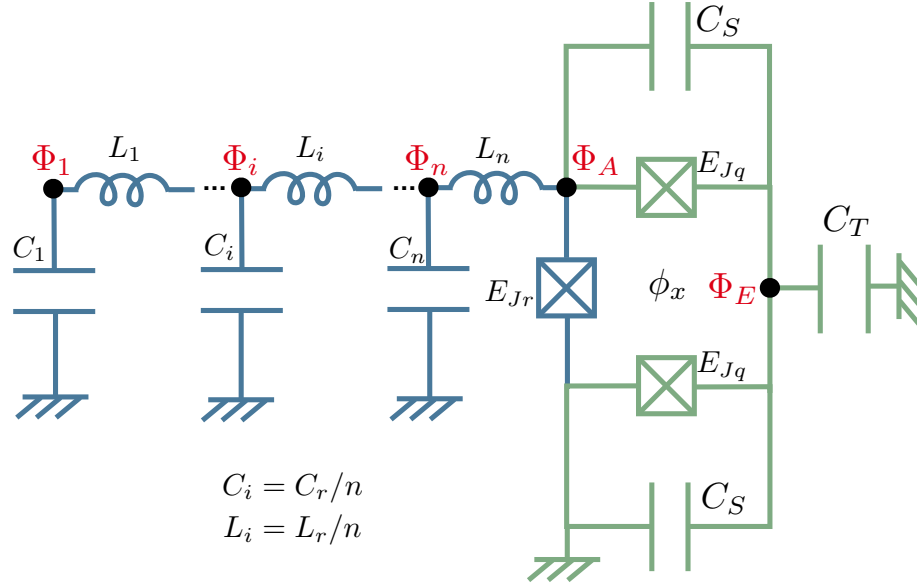


FIGURE 4.1 – Circuit discret effectif du dispositif fabriqué au MIT.

4.1 Réalisation au MIT

La figure (4.1) présente une version discrète du circuit en deux dimensions fabriqué au MIT. La partie bleue correspond à un résonateur coplanaire $\lambda/4$. L'extrémité gauche du résonateur est ouverte tandis que l'extrémité droite est connectée à la terre par une jonction Josephson de grande énergie E_{Jr} . La partie verte correspond au circuit du transmon longitudinalement couplé au résonateur. La différence entre ce circuit et celui étudié au chapitre 3 est que le transmon est inductivement couplé à l'ensemble des modes d'un résonateur coplanaire.

Si l'on traite les jonctions Josephson comme des inductances linéaires, le lagrangien de ce circuit peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j} \frac{C_{ij}}{2} \frac{d\Phi_{ij}}{dt} - \frac{1}{2L_{ij}} \Phi_{ij}, \quad (4.1)$$

où C_{ij} et L_{ij} sont les capacités et les inductances liant les noeuds i et j tandis que les flux de noeuds $\Phi_{ij} = \Phi_i - \Phi_j$. On peut représenter les capacités C_{ij} et les valeurs inverses des inductances $1/L_{ij}$ sous leur forme matricielle respectivement donnée par \mathbf{C}

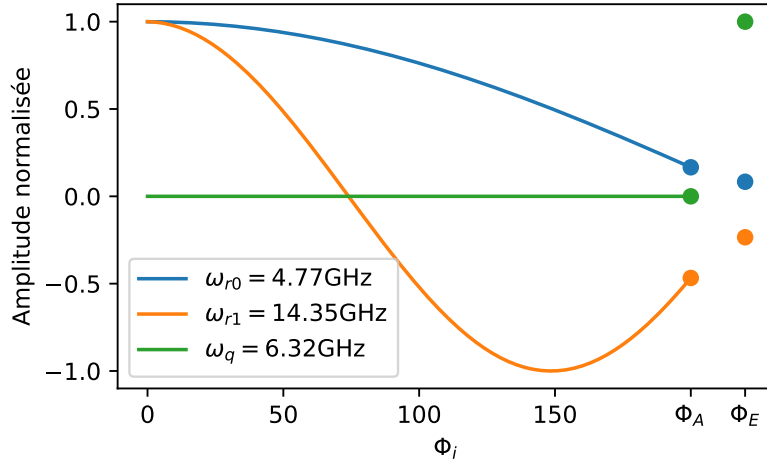


FIGURE 4.2 – Représentation dans l’espace des flux de noeud des trois premiers modes propres du circuit. Les deux derniers points représentent respectivement le noeud Φ_A et le noeud Φ_E . Les fréquences ω_{r0} et ω_{r1} sont celles des deux premiers modes propres du résonateur et ω_q est la fréquence de la première transition du transmon.

et \mathbf{L}^{-1} . En utilisant les équations de Lagrange, on peut obtenir l’équation différentielle

$$\mathbf{C}\ddot{\bar{\Phi}} = -\mathbf{L}^{-1}\bar{\Phi}, \quad (4.2)$$

où $\bar{\Phi}$ est un vecteur contenant l’ensemble des flux de noeud. Les modes propres du système peuvent donc être trouvés numériquement en diagonalisant la matrice $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{C}^{-1}$. Avec les paramètres fournis par le MIT pour le circuit représenté à la figure (4.1) et une discrétisation du circuit en 200 noeuds, les vecteurs propres des trois premiers modes sont tracés à la figure (4.2). Les deux premiers modes du résonateur sont en bleu et en orange. Le mode du qubit, en vert, ne dépend pas des flux de noeud du résonateur et est seulement défini par les oscillations du flux de noeud Φ_E .

L’hamiltonien du circuit peut être écrit avec les deux seuls modes qui sont dans le domaine de fréquence qui nous intéresse, soit le premier mode du résonateur et le mode du qubit. Pour chacun des modes représenté sur la figure (4.2), chaque point d’une même courbe oscille en phase à la fréquence de résonance du mode. Ainsi, le rapport entre le flux de noeud Φ_A et le flux de noeud du premier mode du résonateur, Φ , est constant. Dans l’hamiltonien de couplage du système on peut donc remplacer le flux de noeud Φ_A par $\eta\Phi$, où η est le rapport entre l’amplitude des oscillations du

premier mode propre du résonateur et celle du flux de noeud Φ_A [36]. L'hamiltonien est alors le même que celui étudié au chapitre 3, soit

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{p_\Phi^2}{2C_\Phi} + \frac{\Phi^2}{2L_\Phi} + \frac{p_\Theta^2}{2C_\Theta} \\
 & - 2E_{Jq} \cos \left[\frac{2\pi}{\Phi_0} \left(\Theta + \frac{\Phi_x}{2} \right) \right] \cos \left[\frac{2\pi}{\Phi_0} \left(\eta\Phi - \frac{\Phi_x}{2} \right) \right] \\
 & - \Delta E_{Jq} \sin \left[\frac{2\pi}{\Phi_0} \left(\Theta + \frac{\Phi_x}{2} \right) \right] \sin \left[\frac{2\pi}{\Phi_0} \left(\eta\Phi - \frac{\Phi_x}{2} \right) \right] - \tilde{g}_x p_\Theta p_\Phi.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

On a ajouté un couplage transverse résiduel \tilde{g}_x provenant de l'asymétrie entre les deux capacités de shunt C_S .

4.1.1 Analyse des mesures expérimentales du décalage AC de Stark

Afin de s'assurer que la physique des circuits fabriqués au MIT corresponde à celle de l'hamiltonien de l'Éq. (4.3), des mesures du décalage de Stark ont été effectuées pour différentes valeurs du flux externe Φ_x . Des spectres du système ont également été mesurés.

La figure (4.3) présente, en vert, le spectre mesuré pour deux différentes intervalles du flux externe. Le premier spectre permet d'extraire les paramètres du transmon. On y voit effectivement la transition à 1 photon vers le premier niveau excité ainsi que la transition à 2 photons permettant d'exciter le deuxième niveau. Les valeurs de E_{Jq} et de E_C peuvent en être déduites. Le second spectre montre l'anticroisement entre les premiers états excités du qubit et du résonateur. Cet anticroisement permet de déduire qu'il existe un couplage transverse entre les deux modes.

Pour arriver à aligner le modèle avec les mesures de spectre, il est donc important de considérer le terme de couplage transverse dans l'hamiltonien de l'Éq. (4.3). Les points bleus et orange montrent les fréquences obtenues par la diagonalisation de l'hamiltonien complet. Pour un couplage transverse de 75 MHz, le modèle est bien aligné aux mesures.

Le décalage Stark peut aussi être calculé à partir des énergies propres de l'hamil-

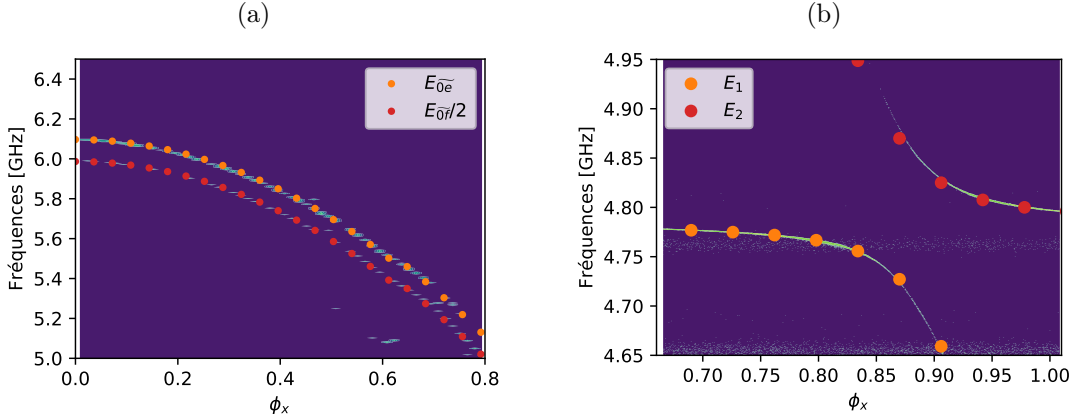


FIGURE 4.3 – (a) Spectre de la première transition à un photon et de la première transition à deux photons du transmon. (b) Spectre au niveau de l’anticroisement entre le premier mode du résonateur et le premier mode du transmon. L’alignement entre le modèle et l’expérience est presque parfait. Dans les deux figures, les lignes vertes sont le résultat de l’expérience tandis que les points rouges et orange sont le résultat des simulations.

tonien de l’Éq. (4.3) avec l’équation

$$\chi = \frac{1}{2} \left[(E_{1e} - E_{0e}) - (E_{1g} - E_{0g}) \right], \quad (4.4)$$

où les énergies propres $E_{n_p i}$ sont associées au nombre de photons n_p dans l’oscillateur et au nombre d’excitations i dans le transmon, comme à la section (2.4.1). En utilisant cette équation, on obtient la courbe orange sur la figure (4.4) (a) qui est tracée en fonction du désaccord entre les fréquences des deux modes. En gardant le couplage transverse égal à 75 MHz et en ajoutant une asymétrie de 2.5% entre les jonctions, le modèle peut être presque parfaitement aligné aux mesures de χ . Les courbes pointillées montrent les contributions des différents termes de l’hamiltonien à la valeur de χ . Comme on s’y attend, la contribution du couplage transverse est à son maximum à la résonance entre les deux modes puisqu’elle suit approximativement l’équation (2.12).

La contribution du couplage inductif, quant à elle, augmente continuellement avec la diminution du désaccord. Pour déterminer l’origine de cette augmentation, il est important d’étudier comment évolue le couplage inductif avec le flux ϕ_x . Pour un flux externe constant et une asymétrie nulle entre les jonctions, l’hamiltonien de couplage

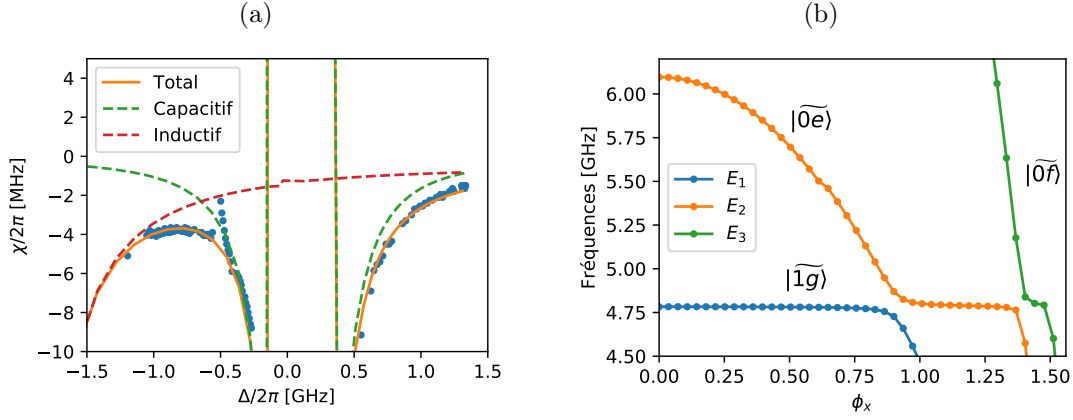


FIGURE 4.4 – (a) Décalage AC de Stark de l’oscillateur en fonction du désaccord entre la fréquence du qubit et la fréquence de l’oscillateur. (b) Spectre du système montrant l’anticroisement à $\phi_x = 0.9$ entre l’état $|\widetilde{1g}\rangle$ et l’état $|\widetilde{0e}\rangle$ issu du couplage transverse, puis l’anticroisement entre l’état $|\widetilde{1g}\rangle$ et l’état $|\widetilde{0f}\rangle$, issu du terme de l’Éq. (4.6).

inductif du système peut s’écrire

$$H_C = -2E_{Jq} \cos \theta \left[\cos \phi \cos \frac{\phi_x}{2} + \sin \phi \sin \frac{\phi_x}{2} \right]. \quad (4.5)$$

Le terme proportionnel à $\cos \theta \sin \phi$ augmente avec le flux externe entre $\phi_x = 0$ et $\phi_x = \pi/4$ et, aux premiers ordres, s’approxime à l’aide des opérateurs échelles par

$$H_C = 2E_{Jq} \sin \left(\frac{\phi_x}{2} \right) \bar{\phi} \frac{\bar{\theta}^2}{2} (ab^{\dagger 2} + a^{\dagger} b^2) \quad (4.6)$$

où $\bar{\phi}$ et $\bar{\theta}$ sont les constantes données à l’Éq. (3.6). Ce terme couple les états $|\widetilde{0f}\rangle$ et $|\widetilde{1g}\rangle$. En s’approchant de la résonance entre ces deux états, que l’on voit sur la figure (4.4) (b) à l’anticroisement entre la courbe orange et la courbe verte, la fréquence de la transition entre les états $|\widetilde{0g}\rangle$ et $|\widetilde{1g}\rangle$ change et χ augmente. Bien que le couplage inductif soit à l’origine de cette augmentation, l’habillage des deux systèmes entraîne des problèmes similaires à ceux du couplage transverse et la mesure longitudinale ne peut pas être réalisée à ces valeurs de ϕ_x .

Pour que seul le terme dispersif du couplage inductif contribue à χ , le système doit être utilisé avec un flux externe nul. Malheureusement, le dispositif étudié semble

contenir un grand couplage transverse parasite dont la contribution au décalage dispersif équivaut à flux nul à celle du couplage inductif.

Grâce à la diagonalisation de l'hamiltonien complet, on a tout de même pu s'assurer que la physique du circuit est bien comprise. La prochaine étape consiste donc à fabriquer de nouveaux dispositifs où les paramètres seront choisis afin que le décalage dispersif soit dominé par le couplage inductif à $\phi_x = 0$. Pour y arriver, le résonateur sera fortement désaccordé du transmon et on s'assurera que le noeud identifié par Φ_E ne soit pas capacitivement couplé à la masse.

4.2 Réalisation à l'institut Néel

Le couplage inductif est depuis longtemps étudié à l'institut Néel, à Grenoble [1], et après avoir démontré son existence dans un circuit semblable à celui étudié au chapitre 3, on essaie maintenant d'utiliser ce même circuit pour réaliser une mesure rapide, QND et de haute fidélité. Pour y arriver, on intègre la boucle verte du circuit présenté à la figure (4.5) à l'intérieur d'une cavité 3D de sorte que le champ électrique de la cavité soit parallèle à l'inductance L_J . De cette manière, le champ électrique de la cavité 3D se couple au mode antisymétrique (ancillaire) du circuit sans se coupler au mode du qubit. La cavité 3D est couplée à l'environnement et on arrive à faire une mesure du qubit par l'entremise d'un des modes habillés entre le mode de la cavité 3D et le mode ancillaire. Le circuit effectif du système total est présenté à la figure (4.5). Dans la réalisation expérimentale, l'inductance L_J est une super-inductance formée par plusieurs boucles SQUID en série. J'ai analysé l'effet Purcell du système et l'effet de l'asymétrie des jonctions sur l'aspect QND de la mesure.

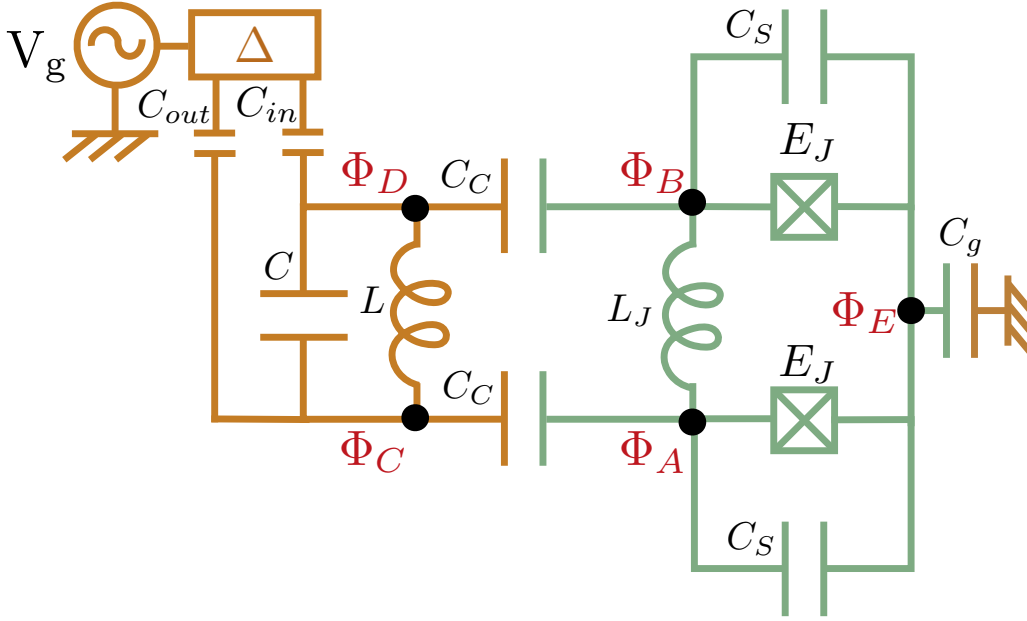


FIGURE 4.5 – Circuit effectif d’une boucle installée à l’intérieure d’une cavité 3D. Le mode ancillaire de la boucle est couplé capacitivement à son premier mode.

4.2.1 Hamiltonien

L’hamiltonien total du circuit s’écrit avec les opérateurs échelles selon l’expression

$$\begin{aligned}
 H = & \omega_r r^\dagger r + \omega_a a^\dagger a + J (r - r^\dagger) (a - a^\dagger) + H_q \\
 & - 2E_J \{ \cos [\bar{\phi} (a + a^\dagger)] - 1 \} \{ \cos (\theta) - 1 \} - 2E_J \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{\phi}^{2n} (a + a^\dagger)^{2n}}{(2n)!} \\
 & - \Delta E_J \sin [\bar{\phi} (a + a^\dagger)] \sin (\theta) + \tilde{g}_x n (r - r^\dagger),
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

où H_q est l’hamiltonien du transmon, J est la force du couplage transverse entre le mode ancillaire et la cavité 3D et r est le mode de la cavité 3D. En comparant la diagonalisation complète de l’hamiltonien de l’Éq. (4.7) aux spectres mesurés expérimentalement, l’équipe de Grenoble évalue à quelques MHz le couplage transverse entre le qubit et le mode de la cavité 3D. La force de ce couplage est donnée par \tilde{g}_x . En faisant une expansion aux premiers ordres des fonctions trigonométriques et en

utilisant les opérateurs échelles pour le qubit, on obtient l'hamiltonien

$$H = \omega_r r^\dagger r + \omega_a a^\dagger a + J (ra^\dagger + r^\dagger a) + H_q + \chi a^\dagger a b^\dagger b - \Delta E_J \bar{\phi} \bar{\theta} (ab^\dagger + a^\dagger b) + g (rb^\dagger + r^\dagger b) \quad (4.8)$$

qui est presque équivalent à l'hamiltonien de l'Éq. (2.38) du système oscillateur-transmon-filtre. Deux phénomènes peuvent mener à de l'effet Purcell dans un tel hamiltonien. Le qubit peut spontanément émettre un photon par l'entremise du mode ancillaire puis de la cavité 3D ou directement par l'entremise de la cavité 3D auquel il est légèrement couplé. Le taux Purcell lié au premier phénomène a été calculé au chapitre 2 et est donné par l'Éq. (2.44). En utilisant cette expression et les paramètres fournis par le groupe de Grenoble, on peut établir que cet effet Purcell impose à leur qubit un temps de vie maximal d'environ 14 ms. Le taux Purcell lié à la deuxième manière d'émettre un photon est quant à lui donné par l'Éq. (2.32) et mène à un temps de vie d'environ 1 ms. Le groupe de recherche mesure un temps de vie de 3 μ s et il est possible pour nous d'établir que ce temps de vie n'est pas limité par l'effet Purcell.

Afin d'étudier la dynamique de la mesure du qubit, il est utile d'étudier ce système quantique dans ses modes habillés. On diagonalise donc les trois premiers termes de l'hamiltonien de l'Éq. (4.7) en effectuant la transformation de Bogoliubov

$$a = \xi_1 c + \xi_2 d, \quad r = \xi_2 c - \xi_1 d, \quad (4.9)$$

où

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1 + 4\frac{g^2}{(\omega_r - \omega_a)^2}}}}, \quad (4.10)$$

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1 + 4\frac{g^2}{(\omega_r - \omega_a)^2}}}}, \quad (4.11)$$

et où c et d sont les modes habillés avec les fréquences

$$\omega_c = \frac{\omega_r + \omega_a}{2} - \sqrt{\left(\frac{\omega_r - \omega_a}{2}\right)^2 + J^2}, \quad (4.12)$$

$$\omega_d = \frac{\omega_r + \omega_a}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_r - \omega_a}{2}\right)^2 + J^2}. \quad (4.13)$$

Puisque les modes r et a sont désaccordés d'environ 1 GHz dans la réalisation expérimentale, les modes habillés le sont également. Il est donc possible d'ajouter des photons à l'un des modes habillés sans perturber l'autre. On s'intéressera ici à la mesure par l'entremise du mode c . L'hamiltonien de couplage sous la transformation de Bogoliubov devient

$$\begin{aligned} H_c = & -2E_J \left\{ \cos [\bar{\phi}\xi_1 (c + c^\dagger)] \cos [\bar{\phi}\xi_2 (d + d^\dagger)] - 1 \right\} \{ \cos(\theta) - 1 \} \\ & + 2E_J \sin [\bar{\phi}\xi_1 (c + c^\dagger)] \sin [\bar{\phi}\xi_2 (d + d^\dagger)] \{ \cos(\theta) - 1 \} \\ & - \Delta E_J \sin [\bar{\phi}\xi_1 (c + c^\dagger)] \cos [\bar{\phi}\xi_2 (d + d^\dagger)] \sin(\theta) \\ & - \Delta E_J \cos [\bar{\phi}\xi_1 (c + c^\dagger)] \sin [\bar{\phi}\xi_2 (d + d^\dagger)] \sin(\theta) \\ & - 2E_J \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{\phi}^{2n} [\xi_1 (c + c^\dagger) + \xi_2 (d + d^\dagger)]^{2n}}{(2n)!} - \tilde{g}_x n [\xi_2 (c - c^\dagger) + \xi_1 (d - d^\dagger)]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Il s'agit d'une expression complexe et comme elle contient trois modes, sa simulation requiert un très grand espace de Hilbert. En effet, si la taille des matrices utilisées pour simuler le mode d est de 5×5 , la taille totale de la matrice densité doit être multipliée par 5 par rapport à celle utilisée pour simuler le circuit à deux modes. Comme le temps de calcul pour la multiplication des matrices augmente avec le cube de leur taille, on s'attend à ce qu'une simulation de ce système demande 125 fois plus de temps que les simulations présentées au chapitre 3. La mémoire vive nécessaire pour réaliser ce genre de simulation pose également problème.

Une première étape afin d'évaluer la dynamique de la mesure consiste donc à approximer l'Éq. (4.14) par l'hamiltonien simulé au chapitre 3. Pour ce faire, la valeur de $\langle d + d^\dagger \rangle$ doit demeurer presque nulle tout au long de la mesure. Puisque les deux modes sont désaccordés de 1 GHz, on suppose que lorsque le système est pompé à la

fréquence ω_c , le mode d demeure dans l'état du vide. On approxime donc

$$\cos [\bar{\phi}\xi_2 (d + d^\dagger)] \approx 1 \quad (4.15)$$

$$(4.16)$$

et on néglige les termes tournants proportionnels à $\sin [\bar{\phi}\xi_2 (d + d^\dagger)]$. On se retrouve finalement avec l'hamiltonien de couplage

$$\begin{aligned} H_c \approx & -2E_J \{ \cos [\bar{\phi}\xi_1 (c + c^\dagger)] - 1 \} \{ \cos (\theta) - 1 \} - \Delta E_J \sin [\bar{\phi}\xi_1 (c + c^\dagger)] \sin (\theta) \\ & - \tilde{g}_x n [\xi_2 (c - c^\dagger)] - 2E_J \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{\phi}^{2n} \xi_1^{2n} (c + c^\dagger)^{2n}}{(2n)!} \end{aligned} \quad (4.17)$$

dont la simulation permet d'évaluer les effets négatifs d'ajouter beaucoup de photons au mode c en présence de l'asymétrie entre les jonctions. La figure (4.6) montre comment l'aspect QND change avec la puissance de mesure pour des simulations de la mesure avec l'hamiltonien (4.17) et les temps $T_1 = 4 \mu s$ et $T_2^* = 3 \mu s$, mesurés expérimentalement. Pour des puissances en dessous de 50 photons, l'aspect QND est toujours limité par T_1 , malgré l'effet combiné du déphasage et de la fuite. Lorsque le qubit est initialisé dans l'état $|0\rangle$, l'aspect QND diminue avec la puissance de mesure, pour les mêmes raisons que celles expliquées à la section (3.2.7). Par ailleurs, on voit que l'aspect QND est à peine réduit par la présence de l'asymétrie entre les jonctions. En effet, $\delta = 2.6\%$ mène à une différence de seulement 0.06% sur l'aspect QND.

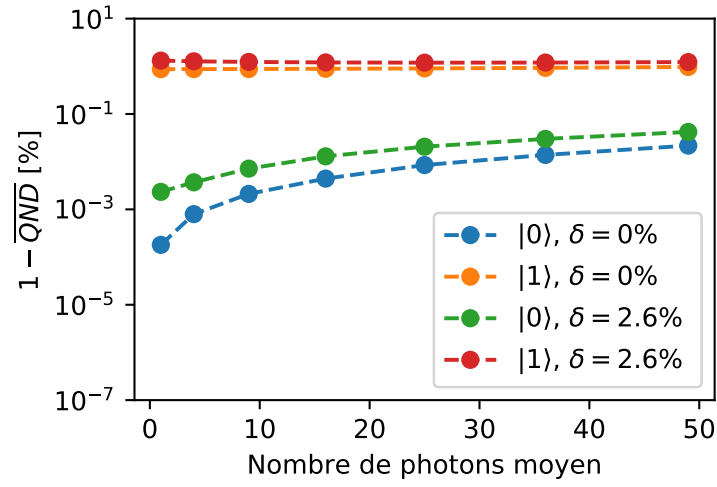


FIGURE 4.6 – Effet de la puissance de la mesure sur l’aspect QND pour $\delta = 0\%$ et $\delta = 2.6\%$. Lorsque le qubit est initialisé dans l’état $|1\rangle$, l’aspect QND est limité par T_1 . Lorsque le qubit est initialisé dans l’état $|0\rangle$, la puissance de mesure diminue l’aspect QND. La faible asymétrie de $\delta = 2.6\%$ réduit l’aspect QND de seulement 0.06% .

Conclusion

La mesure longitudinale basée sur le couplage inductif est une approche prometteuse pour poursuivre l'amélioration de la mesure des qubits supraconducteurs. Dans ce mémoire, je montre que malgré l'existence d'effets nocifs pour le qubit, le couplage inductif permet en principe de réaliser la mesure du qubit avec une puissance près d'un ordre de magnitude plus grande qu'avec le couplage capacitif. Puisque la mesure dure moins de 15 ns, la fidélité peut atteindre 99.9% de fidélité même si on tient compte de la décohérence et la relaxation du qubit. L'aspect QND peut aussi rester supérieur à 99.9% quand on ajoute un grand nombre de photons à l'oscillateur. Les deux réalisations expérimentales décrites au chapitre 4 montrent quant à elles que le couplage est réalisable expérimentalement et qu'il peut mener à une amélioration de la performance de la mesure.

En ayant initialement le but de réaliser des simulations de la mesure longitudinale sans négliger de termes dans l'hamiltonien de couplage inductif, j'ai également dû m'attarder à plusieurs détails concernant la représentation numérique du transmon et de son couplage à un oscillateur harmonique. Premièrement, nous comprenons maintenant pourquoi l'utilisation de la base des opérateurs échelles peut mener à des erreurs numériques si on les utilise pour écrire l'hamiltonien du transmon. Si elle est bien utilisée, la base de charge permet d'éviter ces erreurs et c'est elle que j'ai utilisée pour simuler la mesure longitudinale. Deuxièmement, en étudiant le couplage transverse dans le but de le comparer au couplage longitudinal, j'ai remarqué la présence d'un couplage entre les états ionisés du transmon et ses états logiques. La forte relation de dispersion de ces états dans le spectre de charge de l'hamiltonien de couplage transverse entraîne des résonances avec les états logiques. Il est possible que ce couplage réuni à des résonances accidentelles conduise à la fuite de la population logique vers des

états avec peu de cohérence. Des études plus approfondies pourraient potentiellement permettre d'expliquer l'une des énigmes du domaine, soit la réduction du temps de vie des qubits supraconducteurs avec le nombre de photons dans l'oscillateur auquel il est couplé. Ces couplages sont absents si le transmon est couplé inductivement à l'oscillateur.

Enfin, cette étude solidifie notre compréhension de la mesure longitudinale et nous permet d'avoir une bonne intuition quant au choix de paramètres pour la prochaine génération de circuits fabriqués au MIT et à Grenoble. Selon moi, il ne fait aucun doute que la plus rapide mesure QND d'un qubit supraconducteur aura lieu dans l'un de ces deux laboratoires au cours des prochaines années.

Annexe A

Matériel Supplémentaire

A.1 Théorie des perturbations pour la fuite des niveaux logiques

La fuite apparaît lorsqu'un état cohérent de grande amplitude est excité dans l'oscillateur. Elle est causée par des termes d'hamiltonien de la forme

$$H_L = -E_J \frac{\bar{\phi}^{2n}}{(2n)!} \frac{\bar{\theta}^{2m}}{(2m)!} (a + a^\dagger)^{2n} (b^{2m} + b^{\dagger 2m}), \quad (\text{A.1})$$

où m et n sont des entiers. Afin de calculer analytiquement la fuite, nous prenons comme hamiltonien perturbatif l'opérateur

$$V(t) = -\xi_{n,m} \text{Re} [2\alpha(t)]^{2n} (b^{2m} + b^{\dagger 2m}), \quad (\text{A.2})$$

où

$$\xi_{n,m} = E_J \frac{\bar{\phi}^{2n}}{(2n)!} \frac{\bar{\theta}^{2m}}{(2m)!}. \quad (\text{A.3})$$

Afin de simplifier cet opérateur, nous réduisons le transmon à un système à deux niveaux où l'état fondamental est le niveau i dans lequel le qubit est initialisé et l'état excité est le niveau $2m + i$ vers lequel la population du qubit fuit. Nous approximations ensuite les opérateurs échelles aux matrices 2×2 suivantes :

$$b^{2m} \approx \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{(2m+i)!} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b^{\dagger 2m} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{(2m+i)!} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Afin d'ajouter l'effet du déphasage du niveau $2m + i$, on utilise la matrice

$$M_d \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

comme opérateur de dissipation où γ est le taux de déphasage d'une superposition des états $|i\rangle$ et $|2m + i\rangle$. L'équation maîtresse s'écrit donc

$$\dot{\rho} = -i[V(t), \rho] + D[M_d] \rho. \quad (\text{A.6})$$

On obtient ensuite les 4 équations différentielles couplées suivantes :

$$\dot{\rho}_{11} = -iv(t) (\rho_{12}e^{2mi\omega_q t} - \rho_{21}e^{-2mi\omega_q t}), \quad (\text{A.7})$$

$$\dot{\rho}_{12} = -iv(t)e^{-2mi\omega_q t} (\rho_{11} - \rho_{22}), \quad (\text{A.8})$$

$$\dot{\rho}_{21} = iv(t)e^{2mi\omega_q t} (\rho_{11} - \rho_{22}), \quad (\text{A.9})$$

$$\dot{\rho}_{22} = iv(t) (\rho_{12}e^{2mi\omega_q t} - \rho_{21}e^{-2mi\omega_q t}) + \gamma\rho_{22}, \quad (\text{A.10})$$

où $v(t)$ est la dépendance temporelle de l'hamiltonien perturbatif donné par

$$v(t) = -\xi_{n,m} \sqrt{(2m+i)!} \text{Re}[2\alpha(t)]^{2n}. \quad (\text{A.11})$$

En utilisant $\rho_{11} = 1 - \rho_{22}$, et $\rho_{12} = x + iy$ on réduit le problème à un système à 3 équations :

$$\dot{x} = \sin(2m\omega_q t)v(t)(2\rho_{22} - 1), \quad (\text{A.12})$$

$$\dot{y} = \cos(2m\omega_q t)v(t)(2\rho_{22} - 1), \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{22} = & -2v(t)\sin(2m\omega_q t)x \\ & -2v(t)\cos(2m\omega_q t)y + \frac{\gamma}{2}\rho_{22}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Puisque nous souhaitons trouver une expression analytique pour ρ_{22} lorsque la fuite est petite par rapport à 1, on approxime les équations (A.12) et (A.13) à

$$x = \int_0^t \sin(2m\omega_q \tau)v(\tau)d\tau \quad (\text{A.15})$$

$$y = \int_0^t \cos(2m\omega_q \tau)v(\tau)d\tau \quad (\text{A.16})$$

Afin de poursuivre les calculs nous utilisons le fait que la partie réelle de $\alpha(t)$ oscille à la fréquence de résonance de l'oscillateur et que son amplitude, $\alpha_i(t)$, initialement nulle, augmente lentement par rapport à ω_r de sorte que

$$v(t) = \tilde{v}_{n,m}\alpha_i^{2n}(t)\cos^{2n}(\omega_r t). \quad (\text{A.17})$$

avec,

$$\tilde{v}_{n,m} = -\xi_{n,m} 2^{2n} \sqrt{(2m+i)!} \quad (\text{A.18})$$

Si $\gamma = 0$, la solution de l'équation différentielle (A.14) est donnée par

$$\begin{aligned} \rho_{22} = & \tilde{v}_{n,m}^2 \int_0^t \left\{ \alpha_i^{2n}(\tau) \cos(m\omega_q \tau) \cos^{2n}(\omega_r \tau) F(\tau) \right. \\ & \left. + \alpha_i^{2n}(\tau) \cos(m\omega_q \tau) \cos^{2n}(\omega_r \tau) G(\tau) \right\} d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

où,

$$F(\tau) = \int_0^\tau \alpha_i^{2n}(t') \cos(m\omega_q t') \cos^{2n}(\omega_r t') dt' \quad (\text{A.20})$$

$$G(\tau) = \int_0^\tau \alpha_i^{2n}(t') \sin(m\omega_q t') \cos^{2n}(\omega_r t') dt' \quad (\text{A.21})$$

Avec le théorème de Leibniz et en utilisant $\alpha_i^{2n}(0) = 0$, on obtient

$$\frac{dF(\tau)}{d\tau} = \alpha_i^{2n}(\tau) \cos(m\omega_q \tau) \cos^{2n}(\omega_r \tau) \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} = \alpha_i^{2n}(\tau) \sin(m\omega_q \tau) \cos^{2n}(\omega_r \tau). \quad (\text{A.23})$$

En incluant ces expressions dans l'équation (A.21) on obtient finalement une expression simple pour ρ_{22} :

$$\rho_{22} = \tilde{v}_{n,m}^2 \int_0^t \left[F(\tau) \frac{dF(\tau)}{d\tau} + G(\tau) \frac{dG(\tau)}{d\tau} \right] d\tau \quad (\text{A.24})$$

$$= \frac{\tilde{v}_{n,m}^2}{2} [F^2(t) + G^2(t)] \quad (\text{A.25})$$

Calculons maintenant $F(t)$. En utilisant l'identité

$$\begin{aligned} \cos^{2n}(x) = \\ \frac{1}{2^{2n}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} 2 \frac{(2n)!}{k! (2n-k)!} \cos[2(n-k)x] + \frac{(2n)!}{(n!)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

on trouve que

$$F(t) = \frac{\alpha_i^{2n}(t)}{2^{2n}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n)!}{k! (2n-k)!} (A_{n,k}(t) + B_{n,k}(t)) \right. \quad (\text{A.27})$$

$$\left. + \frac{(2n)!}{(n!)^2 m \omega_q} \sin(m \omega_q t) \right\} \quad (\text{A.28})$$

avec,

$$A_{n,k}(t) = \frac{\sin \{ [2(n-k) \omega_r - m \omega_q] t \}}{2(n-k) \omega_r - m \omega_q}, \quad (\text{A.29})$$

$$B_{n,k}(t) = \frac{\sin \{ [2(n-k) \omega_r + m \omega_q] t \}}{2(n-k) \omega_r + m \omega_q}.$$

De la même manière, on trouve l'expression analytique pour $G(t)$:

$$G(t) = \frac{\alpha_i^{2n}(t)}{2^{2n}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n)!}{k! (2n-k)!} (C_{n,k}(t) - D_{n,k}(t)) \right. \quad (\text{A.30})$$

$$\left. - \frac{(2n)!}{(n!)^2 m \omega_q} \cos(m \omega_q t) \right\}$$

avec,

$$C_{n,k}(t) = \frac{\cos \{ [2(n-k) \omega_r - m \omega_q] t \}}{2(n-k) \omega_r - m \omega_q}, \quad (\text{A.31})$$

$$D_{n,k}(t) = \frac{\cos \{ [2(n-k) \omega_r + m \omega_q] t \}}{2(n-k) \omega_r + m \omega_q}. \quad (\text{A.32})$$

Afin de trouver les expressions (A.28) et (A.30), nous avons assumé que $\alpha_i^{2n}(t)$ n'avait pas de contenu en fréquence près de $2(n-k) \omega_r - m \omega_q$. Ceci est valide pour les pulses utilisés dans les simulations et pour de petites valeurs de n . L'Éq. (A.25) est proportionnelle à $\alpha_i(t)$. On en déduit donc, qu'en absence de déphasage, la fuite est un processus réversible qui disparaît lorsque l'oscillateur est réinitialisé.

A.1.1 Cas $n = m = 1$

La valeur de $\xi_{m,n}$ est maximale pour $n = m = 1$. Le terme d'hamiltonien lorsque $n = m = 1$ mène à de la fuite vers les niveaux 2 et 3 lorsque le qubit est respectivement

dans les niveaux 0 et 1. Dans ce cas, on trouve que

$$\rho_{22} = \frac{4(2+i)!\alpha_i(t)^4\chi^2}{(2\omega_r)^2 - (2\omega_q)^2} [1 - \cos^4(\omega_r t)] \quad (\text{A.33})$$

où χ est le décalage dispersif présenté à l'Éq. (4.4). Cette expression est confirmée par les intégrations numériques de l'hamiltonien complet du système comme on peut l'apprécier à la figure (A.1).

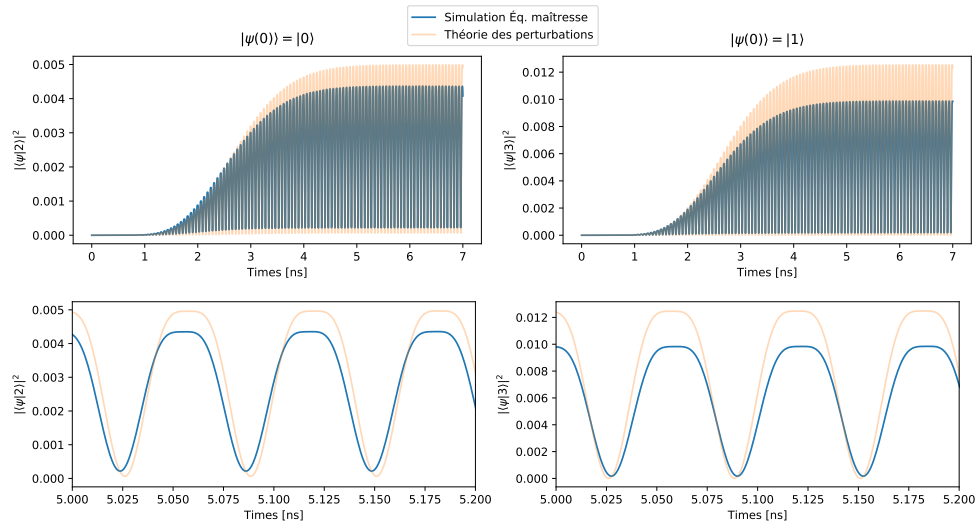


FIGURE A.1 – Comparaison entre la théorie des perturbations au premier ordre et la simulation de l'équation maîtresse de l'hamiltonien complet.

A.1.2 Près des résonances

Lorsque $2(n - k')\omega_r$ est près de $m\omega_q$, les termes inversement proportionnels à la différence entre ces fréquences dans $F(t)$ et $G(t)$ augmentent rapidement et mène à de la fuite avec l'amplitude

$$\rho_{22} = \frac{\alpha_i^4(t)}{2^{4n}} \frac{(2n)!}{k'!(2n - k')!} \frac{1}{(2(n - k')\omega_r - m\omega_q)^2}. \quad (\text{A.34})$$

A.1.3 Déphasage ($\gamma > 0$)

La solution à l'équation différentielle Éq. (A.14) avec $\gamma > 0$ est donné par

$$\rho_{22}^{\gamma>0} = e^{\frac{\gamma}{2}t} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2}\tau} \beta(\tau) d\tau \quad (\text{A.35})$$

où,

$$\begin{aligned} \beta(t) = & -2v(t) \sin(2m\omega_q t) \int_0^t v(\tau) \sin(2m\omega_q \tau) d\tau \\ & - 2v(t) \cos(2m\omega_q t) \int_0^t v(\tau) \cos(2m\omega_q \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

On peut résoudre l'intégrale (A.35) par partie et trouver

$$\rho_{22}^{\gamma>0} = \rho_{22}^{\gamma=0} + \frac{\gamma}{2} e^{\frac{\gamma}{2}t} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2}\tau} \rho_{22}^{\gamma=0} d\tau \quad (\text{A.37})$$

$$\approx \rho_{22}^{\gamma=0} + \overline{\rho_{22}^{\gamma=0}} \frac{\gamma}{2} e^{\frac{\gamma}{2}t} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2}\tau} d\tau \quad (\text{A.38})$$

$$= \rho_{22}^{\gamma=0} + \overline{\rho_{22}^{\gamma=0}} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{2}t}\right), \quad (\text{A.39})$$

où $\overline{\rho_{22}^{\gamma=0}}$ est la valeur moyenne de la fuite dans le cas où le taux de déphasage est égal à 0. Le deuxième terme de l'expression (A.39) conduit à de la fuite irréversible vers le niveau $2m + i$ dont l'amplitude est

$$L_{t_f} = \frac{\gamma_\phi}{2} \overline{\rho_{22}^{\gamma_\phi=0}} t_m, \quad (\text{A.40})$$

où t_m est le temps de la mesure.

A.2 Transformation de Polaron pour le filtre Purcell

À partir de l'hamiltonien pour le système dans le référentiel tournant à ω_d ,

$$H_{eff} = \Delta_{fd} f^\dagger f + \Delta_{rd} a^\dagger a + \omega_q \frac{\sigma_z}{2} + J(a f^\dagger + a^\dagger f) + \chi a^\dagger a \sigma_z \quad (\text{A.41})$$

et de l'équation maîtresse

$$\dot{\rho} = -i[H_{eff}, \rho] + \kappa \mathcal{D}[f]\rho + \gamma_1 \mathcal{D}[\sigma_-]\rho + \gamma_\phi \mathcal{D}[\sigma_z]\rho \quad (\text{A.42})$$

on trouve les équations de déplacement couplées

$$\dot{\alpha} = -i (\Delta_{rd} + \chi\sigma_z) \alpha - iJ\sigma_z\zeta, \quad (\text{A.43})$$

$$\dot{\zeta} = -i\Delta_{fd}\zeta - iJ\alpha - \frac{\kappa}{2}\zeta - i\epsilon, \quad (\text{A.44})$$

pour les deux oscillateurs. La transformation de Polaron qui permet de déplacer les deux oscillateurs vers l'état du vide s'écrit,

$$P = |e\rangle \langle e| D(\alpha_e)D(\zeta_e) + |g\rangle \langle g| D(\alpha_g)D(\zeta_g), \quad (\text{A.45})$$

où les fonctions α_g , ζ_g et α_e , ζ_e sont les solutions des équations différentielles couplées lorsque le qubit est initialisé dans l'état fondamental ou excité du qubit, respectivement. On applique cette transformation sur la matrice densité pour obtenir la matrice densité :

$$\rho^P = P^\dagger \rho P. \quad (\text{A.46})$$

En utilisant cette nouvelle matrice densité dans l'équation maîtresse, on obtient l'équation dans le référentiel de Polaron donnée par

$$\dot{\rho}^P = -i [H^P, \rho^P] + \kappa \mathcal{D}[a^P] \rho^P + \gamma_1 \mathcal{D}[\sigma_-^P] \rho^P + \gamma_\phi \mathcal{D}[\sigma_z^P] \rho^P - P^\dagger \dot{P} \rho^P - \rho^P \dot{P}^\dagger P \quad (\text{A.47})$$

qui mène à

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^P = & -i \left(\frac{\omega_q + \tilde{B}}{2} \right) [\sigma_z, \rho^P] - i [(\Delta_{rd} + \chi\sigma_z) a^\dagger a + \Delta_{fd} f^\dagger f, \rho^P] \\ & + \gamma_1 \mathcal{D} [\sigma_- D^\dagger(\alpha_g) D(\alpha_e) D^\dagger(\zeta_g) D(\zeta_e)] \rho^P + \kappa \frac{\zeta_e^* - \zeta_g^*}{2} b [\rho^P, \sigma_z] \\ & + \kappa \frac{\zeta_e - \zeta_g}{2} [\sigma_z, \rho^P] b^\dagger + \kappa \mathcal{D}[f] \rho^P + \left(\frac{\Gamma_m}{4} + \gamma_\phi/2 \right) \mathcal{D}[\sigma_z] \rho^P, \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

où,

$$\Gamma_m = \kappa |\zeta_e - \zeta_g|^2 \quad (\text{A.49})$$

$$\tilde{B} = \frac{\kappa}{2} \text{Im} (\zeta_e \zeta_g^*) + \frac{\epsilon_d^* (\zeta_e - \zeta_g) + \epsilon_d (\zeta_e^* - \zeta_g^*)}{4} \quad (\text{A.50})$$

Avec la représentation de P, on peut réécrire la matrice densité dans le référentiel de Polaron comme

$$\rho^P = \sum_{kl} \int d^2\alpha P_{kl}(\alpha, \zeta) |\alpha, \zeta, k\rangle \langle \alpha, \zeta, l|, \quad (\text{A.51})$$

où $P_{kl}(\alpha, \zeta)$ vaut $P_{kl}\delta^2(\alpha)\delta^2(\zeta)$ puisque les 2 oscillateurs demeurent toujours dans l'état du vide dans le référentiel de Polaron. Les constantes P_{kl} sont des nombres complexes qui respectent la règle de normalisation $\sum_k P_{kk}^2 = 1$. On trouve donc

$$\rho^P = \sum_{kl} P_{kl} |0, 0, k\rangle \langle 0, 0, l| \quad (\text{A.52})$$

et sa dérivée temporelle

$$\dot{\rho}^P = \sum_{kl} \dot{P}_{kl} |0, 0, k\rangle \langle 0, 0, l|, \quad (\text{A.53})$$

où l et k peuvent prendre les valeurs logiques du qubit. En parallèle, on peut aussi obtenir les résultats suivants qui nous aideront dans la suite du calcul.

$$\left[\sum_{kl} P_{kl} |0, 0, k\rangle \langle 0, 0, l|, \sigma_z \right] = 2P_{e,g} |0, 0, e\rangle \langle 0, 0, g| - 2P_{e,g} |0, 0, g\rangle \langle 0, 0, e|, \quad (\text{A.54})$$

$$\mathcal{D}[\sigma_z] \sum_{kl} P_{kl} |0, 0, k\rangle \langle 0, 0, l| = -2P_{e,g} |0, 0, e\rangle \langle 0, 0, g| - 2P_{e,g} |0, 0, g\rangle \langle 0, 0, e|, \quad (\text{A.55})$$

$$\mathcal{D} [\sigma_- D^\dagger(\alpha_g) D(\alpha_e) D^\dagger(\zeta_g) D(\zeta_e)] \sum_{kl} P_{kl} |0, 0, k\rangle \langle 0, 0, l| \quad (\text{A.56})$$

$$= P_{e,e} |0, 0, g\rangle \langle 0, 0, g| - P_{e,e} |0, 0, e\rangle \langle 0, 0, e| - \frac{P_{e,g}}{2} |0, 0, e\rangle \langle 0, 0, g| - \frac{P_{g,e}}{2} |0, 0, g\rangle \langle 0, 0, e| \quad (\text{A.57})$$

où, dans la dernière égalité, on a utilisé l'approximation $D^\dagger(\alpha_e)D(\alpha_g)D^\dagger(\zeta(e))D(\zeta_e) \approx e^{-|\alpha_e - \alpha_g + \zeta_e - \zeta_g|}$. En remplaçant toutes ces expressions dans l'Éq. (A.48), on obtient les quatre équations différentielles suivantes :

$$\dot{P}_{e,e}/P_{e,e} = -\gamma_1, \quad (\text{A.58})$$

$$\dot{P}_{g,g}/P_{e,e} = \gamma_1, \quad (\text{A.59})$$

$$\dot{P}_{e,g}/P_{e,g} = -i \left(\omega_q + \tilde{B} \right) - \left(\gamma_\phi + \frac{\gamma_1}{2} + \frac{\Gamma_m}{2} \right), \quad (\text{A.60})$$

$$\dot{P}_{g,e}/P_{g,e} = i \left(\omega_q + \tilde{B} \right) - \left(\gamma_\phi + \frac{\gamma_1}{2} + \frac{\Gamma_m}{2} \right). \quad (\text{A.61})$$

Ces équations permettent de trouver comment évolue la matrice densité du qubit dans le référentiel de Polaron. On veut cependant trouver ces équations dans le référentiel du laboratoire. Or, on sait que la matrice densité du qubit dans le référentiel du

laboratoire est donnée par

$$\rho = \text{Tr}_{\text{osc}} (P \rho^P P^\dagger) \quad (\text{A.62})$$

$$= \sum_{kl} P_{kl} \text{Tr}_{\text{osc}} [P |0, 0, k\rangle \langle 0, 0, l|] \quad (\text{A.63})$$

$$= \sum_{kl} P_{kl} |k\rangle \langle l| e^{-\frac{1}{2}|\alpha_k - \alpha_l|^2 + i\text{Im}(\alpha_k \alpha_l^*)} e^{-\frac{1}{2}|\zeta_k - \zeta_l|^2 + i\text{Im}(\zeta_k \zeta_l^*)} \quad (\text{A.64})$$

$$\Rightarrow \rho_{kl} = P_{kl} |k\rangle \langle l| e^{-\frac{1}{2}|\alpha_k - \alpha_l|^2 + i\text{Im}(\alpha_k \alpha_l^*)} e^{-\frac{1}{2}|\zeta_k - \zeta_l|^2 + i\text{Im}(\zeta_k \zeta_l^*)}. \quad (\text{A.65})$$

En prenant la dérivée de cette dernière expression et en utilisant les quatre équations différentielles précédentes on trouve

$$\dot{\rho}_{e,e} = -\gamma_1 \rho_{e,e}, \quad (\text{A.66})$$

$$\dot{\rho}_{g,g} = \gamma_1 \rho_{e,e}, \quad (\text{A.67})$$

$$\dot{\rho}_{e,g} = - \left[\Gamma_d + \frac{\gamma_1}{2} + \gamma_\phi + i(B + \omega_a) \right] \rho_{e,g}, \quad (\text{A.68})$$

$$\dot{\rho}_{g,e} = - \left[\Gamma_d + \frac{\gamma_1}{2} + \gamma_\phi - i(B + \omega_a) \right] \rho_{g,e}. \quad (\text{A.69})$$

où,

$$\Gamma_d = \Gamma_m + \text{Re} \left[\left(\dot{\zeta}_e - \dot{\zeta}_g \right) (\zeta_e^* - \zeta_g^*) \right] + \text{Re} \left[(\dot{\alpha}_e - \dot{\alpha}_g) (\alpha_e^* - \alpha_g^*) \right], \quad (\text{A.70})$$

$$B = \tilde{B} - i\text{Im} \left(\dot{\zeta}_e \zeta_g^* + \zeta_e \dot{\zeta}_g^* \right) - i\text{Im} \left(\dot{\alpha}_e \alpha_g^* + \alpha_e \dot{\alpha}_g^* \right). \quad (\text{A.71})$$

En utilisant les Éq. (A.43) et (A.44) on trouve que ces deux expressions sont également donnés par

$$\Gamma_d = 2\chi \text{Im}(\alpha_g \alpha_e^*) + 2\chi_{ab} \text{Im}(\alpha_g \zeta_e^* + \alpha_e^* \zeta_g) \quad (\text{A.72})$$

et,

$$B = 2\chi \text{Re}(\alpha_e \alpha_g^*) \quad (\text{A.73})$$

A.3 Relaxation et décohérence

Par convention, avec l'effet de la décohérence et de la relaxation, l'équation maîtresse d'un qubit dans le référentiel tournant s'écrit :

$$\dot{\rho} = \frac{\gamma_\phi}{2} \mathcal{D}[\sigma_z] \rho + \gamma_1 \mathcal{D}[\sigma_-] \rho, \quad (\text{A.74})$$

et mène à l'équation différentielle

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho}_{00} & \dot{\rho}_{01} \\ \dot{\rho}_{10} & \dot{\rho}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_1 \rho_{00} & -\left(\gamma_\phi + \frac{\gamma_1}{2}\right) \rho_{01} \\ -\left(\gamma_\phi + \frac{\gamma_1}{2}\right) \rho_{10} & \gamma_1 \rho_{00} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.75})$$

où ρ_{11} et ρ_{00} sont les probabilités que le qubit soit respectivement dans l'état $|1\rangle$ et dans l'état $|0\rangle$. Les solutions pour ρ_{00} et ρ_{01} sont

$$\rho_{11}(t) = \rho_{11}(0) e^{-\gamma_1 t}, \quad (\text{A.76})$$

$$\rho_{01}(t) = \rho_{01}(0) e^{-\gamma_\phi^* t}, \quad (\text{A.77})$$

où

$$\gamma_\phi^* = \gamma_\phi + \frac{\gamma_1}{2} \quad (\text{A.78})$$

est le taux de décohérence total qui inclut les effets de la relaxation. On définit les temps de vie et les temps de cohérence selon

$$T_1 = \frac{1}{\gamma_1}, \quad (\text{A.79})$$

$$T_2 = \frac{1}{\gamma_\phi}, \quad (\text{A.80})$$

$$\frac{1}{T_2^*} = \frac{1}{2T_1} + \frac{1}{T_2}. \quad (\text{A.81})$$

Puisqu'un transmon a plusieurs niveaux propres, la décohérence et la relaxation doivent être considérés pour chacun des niveaux et les éléments ρ_{ij} de la matrice densité du transmon ρ doivent évoluer selon les équations

$$\rho_{jj}(t) = \rho_{jj}(0) e^{-t/T_1^j}, \quad (\text{A.82})$$

$$\rho_{ij}(t) = \rho_{ij}(0) e^{-t/T_2^{*ij}}, \quad (\text{A.83})$$

où T_1^j est le temps de vie du niveau j , T_2^{*ij} est le temps de cohérence de la superposition des niveaux i et j . On assume ici que $j > i$ et que la relaxation entraîne la population

d'un niveau vers le niveau inférieur suivant.

Dans les simulations réalisées dans ce mémoire, où jusqu'à 15 niveaux sont utilisés pour simuler le transmon, les opérateurs de dissipations doivent être généralisées à plusieurs dimensions. Intuitivement, les deux opérateurs qu'on choisi pour remplacer σ_z et σ_- sont respectivement $a^\dagger a$ et a . L'équation maîtresse est donc

$$\dot{\rho} = \frac{1}{2T_2} \mathcal{D}[2a^\dagger a] \rho + \frac{1}{T_1} \mathcal{D}[a] \rho \quad (\text{A.84})$$

où on a ajouté un facteur 2 devant l'opérateur $a^\dagger a$ pour préserver les équations du mouvement (A.82) et (A.83). Utiliser ces opérateurs mène à une augmentation proportionnelle de la relaxation avec le niveau du transmon. Cette augmentation est confirmée expérimentalement dans la référence [35]. Par contre, l'utilisation de l'opérateur $a^\dagger a$ ne mène pas à la décohérence mesurée dans cette référence.

Le tableau (A.1) présente une comparaison entre les valeurs de T_1^i et T_2^{*ij} calculées avec ce premier modèle, qu'on nomme modèle A, et ceux mesurés expérimentalement [35]. On note que ce modèle perd en justesse pour les états $|3\rangle$ et $|4\rangle$ puisque le bruit de charge, qui n'est pas contenu dans notre modèle, augmente à ces niveaux. Afin de le corriger, on modifie les éléments de la matrice diagonale $a^\dagger a$ selon la transformation

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 \times 1.15 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 \times 1.65 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \times 3.2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (\text{A.85})$$

afin que tous les temps de cohérence soient alignés avec les mesures présentées dans [35]. Pour les niveaux suivants, on extrapole les valeurs mesurées à avec une fonction quadratique. Cette méthode est approximative mais nécessaire puisqu'on comprend mal comment la décohérence agit sur les différents niveaux transmons et qu'aucune mesure expérimentale de la décohérence et de la relaxation ne va au-delà du niveau 4.

Dans l'étude de la fuite pendant la mesure longitudinale, nous nous intéressons principalement à la cohérence pour des superpositions des états $|0\rangle$ et $|2\rangle$ et des états $|1\rangle$ et $|3\rangle$. Ces temps de cohérence ne sont pas mesurés dans la référence [35] mais sont approximés par notre modèle à 19 et 7 μs . Lorsque la puissance de mesure augmente, la cohérence d'autres superpositions devient aussi importante.

Niveaux $i - j$	0 - 1	1 - 2	2 - 3	3 - 4
T_1 [35] [μs]	84	41	30	22
T_1 [modèle A] [μs]	84	42	28	21
T_2^* [35] [μs] $\pm 20\%$	72	32	12	< 2
T_2^* [modèle A] [μs]	72	39	27	20
T_2^* [modèle B] [μs]	72	32	12	2

TABLEAU A.1 – T_2 pour les différents niveaux du transmon selon la référence [35]
. Le modèle A fait référence au modèle naïf qui utilise l'opérateur $a^\dagger a$ tandis que le
modèle B fait référence au modèle qui utilise une matrice diagonale corrigée.

Bibliographie

- [1] Etienne Dumur. *A V-shape superconducting artificial atom for circuit quantum electrodynamics*. Theses, Université Grenoble Alpes, (2015). [cf. p. [iiiiii](#), [45](#), [68](#)]
- [2] F. Lecocq, J. Claudon, O. Buisson et P. Milman. Nonlinear coupling between the two oscillation modes of a dc squid. *Phys. Rev. Lett.* **107**, 197002 (2011). [cf. p. [iiiiii](#), [45](#)]
- [3] Nicolas Didier, Jérôme Bourassa et Alexandre Blais. Fast quantum nondemolition readout by parametric modulation of longitudinal qubit-oscillator interaction. *Phys. Rev. Lett.* **115**, 203601 (2015). [cf. p. [iiiiii](#), [29](#), [42](#), [43](#)]
- [4] Michael A Nielsen et Isaac Chuang. Quantum computation and quantum information, (2002). [cf. p. [1](#)]
- [5] Antonio Acín, Immanuel Bloch, Harry Buhrman, Tommaso Calarco, Christopher Eichler, Jens Eisert, Daniel Esteve, Nicolas Gisin, Steffen J Glaser, Fedor Jelezko, Stefan Kuhr, Maciej Lewenstein, Max F Riedel, Piet O Schmidt, Rob Thew, Andreas Wallraff, Ian Walmsley et Frank K Wilhelm. The quantum technologies roadmap : a european community view. *New J. Phys.* **20**(8), 080201 (2018). [cf. p. [1](#)]
- [6] Alan Pierce. The ibm q is a working 50 qubits quantum computer. *Tech Directions* **77**(9), 8–9 (2018). [cf. p. [1](#)]
- [7] Barbara M Terhal. Quantum supremacy, here we come. *Nat. Phys.* **14**(6), 530 (2018). [cf. p. [1](#)]
- [8] Alexandre Blais, Ren-Shou Huang, Andreas Wallraff, Steven M Girvin et R Jun Schoelkopf. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits : An architecture for quantum computation. *Phys. Rev. A* **69**(6), 062320 (2004). [cf. p. [2](#), [18](#), [20](#), [21](#), [31](#)]
- [9] Jens Koch, Terri M. Yu, Jay Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, Alexandre Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Charge-insensitive qubit design derived from the cooper pair box. *Phys. Rev. A* **76**, 042319 (2007). [cf. p. [2](#), [9](#), [11](#), [32](#)]

- [10] Andreas Wallraff, David I Schuster, Alexandre Blais, L Frunzio, R-S Huang, J Majer, S Kumar, Steven M Girvin et Robert J Schoelkopf. Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics. *Nature* **431**(7005), 162 (2004). [cf. p. 2]
- [11] MD Reed, BR Johnson, AA Houck, L DiCarlo, JM Chow, DI Schuster, L Frunzio et RJ Schoelkopf. Fast reset and suppressing spontaneous emission of a superconducting qubit. *Appl. Phys. Lett.* **96**(20), 203110 (2010). [cf. p. 2, 36]
- [12] Michel H Devoret et others. Quantum fluctuations in electrical circuits. *Les Houches, Session LXIII* **7**(8) (1995). [cf. p. 3]
- [13] Michel H. Devoret Uri Vool. Introduction to quantum electromagnetic circuits. *International Journal of Circuit Theory and Applications* (2017). [cf. p. 3]
- [14] John R Taylor. *Classical mechanics*. University Science Books, (2005). [cf. p. 5]
- [15] Gerard J. Millburn D. F. Walls. *Quantum Optics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2007). <http://www.springer.com/gp/book/9783540285731>. [cf. p. 6]
- [16] Michael Tinkham. *Introduction to superconductivity*. Courier Corporation, (2004). [cf. p. 8]
- [17] Yuriy Makhlin, Gerd Schön et Alexander Shnirman. Quantum-state engineering with josephson-junction devices. *Reviews of modern physics* **73**(2), 357 (2001). [cf. p. 8, 12]
- [18] L DiCarlo, JM Chow, JM Gambetta, Lev S Bishop, BR Johnson, DI Schuster, J Majer, A Blais, L Frunzio, SM Girvin et others. Demonstration of two-qubit algorithms with a superconducting quantum processor. *Nature* **460**(7252), 240 (2009). [cf. p. 10]
- [19] T. Walter, P. Kurpiers, S. Gasparinetti, P. Magnard, A. Potočnik, Y. Salathé, M. Pechal, M. Mondal, M. Oppliger, C. Eichler et A. Wallraff. Rapid high-fidelity single-shot dispersive readout of superconducting qubits. *Phys. Rev. Appl.* **7**, 054020 (2017). [cf. p. 18, 27, 31, 42]
- [20] JJ Sakurai. Advanced quantum mechanics. *American Journal of Physics* **36**(5), 465–466 (1968). [cf. p. 19]
- [21] H.M. Wiseman et G.J. Milburn. *Quantum Measurement and Control*. Cambridge University Press, (2010). <https://books.google.ca/books?id=ZNjvHaH8qA4C>. [cf. p. 19, 27]
- [22] Jay Gambetta, WA Braff, A Wallraff, SM Girvin et RJ Schoelkopf. Protocols for optimal readout of qubits using a continuous quantum nondemolition measurement. *Phys. Rev. A* **76**(1), 012325 (2007). [cf. p. 28]
- [23] MD Reed, L DiCarlo, BR Johnson, L Sun, DI Schuster, L Frunzio et RJ Schoelkopf. High-fidelity readout in circuit quantum electrodynamics using the jaynes-cummings nonlinearity. *Physical review letters* **105**(17), 173601 (2010). [cf. p. 29]

- [24] A. A. Houck, J. A. Schreier, B. R. Johnson, J. M. Chow, Jens Koch, J. M. Gambetta, D. I. Schuster, L. Frunzio, M. H. Devoret, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf. Controlling the spontaneous emission of a superconducting transmon qubit. *Phys. Rev. Lett.* **101**, 080502 (2008). [cf. p. 30]
- [25] Jay Gambetta, Alexandre Blais, Maxime Boissonneault, Andrew A Houck, DI Schuster et Steven M Girvin. Quantum trajectory approach to circuit qed : Quantum jumps and the zeno effect. *Phys. Rev. A* **77**(1), 012112 (2008). [cf. p. 31]
- [26] Maxime Boissonneault, Jay M Gambetta et Alexandre Blais. Dispersive regime of circuit qed : Photon-dependent qubit dephasing and relaxation rates. *Phys. Rev. A* **79**(1), 013819 (2009). [cf. p. 31, 40]
- [27] Lucas Verney, Raphaël Lescanne, Michel H Devoret, Zaki Leghtas et Mazyar Mirrahimi. Strongly driven quantum josephson circuits. *arXiv preprint arXiv :1805.07542* (2018). [cf. p. 31, 35]
- [28] Raphaël Lescanne, Lucas Verney, Quentin Ficheux, Michel H Devoret, Benjamin Huard, Mazyar Mirrahimi et Zaki Leghtas. Dynamics of an off-resonantly pumped superconducting qubit in a cavity. *arXiv preprint arXiv :1805.05198* (2018). [cf. p. 31, 35]
- [29] JA Schreier, Andrew A Houck, Jens Koch, David I Schuster, BR Johnson, JM Chow, Jay M Gambetta, J Majer, L Frunzio, Michel H Devoret et others. Suppressing charge noise decoherence in superconducting charge qubits. *Phys. Rev. B* **77**(18), 180502 (2008). [cf. p. 31]
- [30] Evan Jeffrey, Daniel Sank, JY Mutus, TC White, J Kelly, R Barends, Y Chen, Z Chen, B Chiaro, A Dunsworth et others. Fast accurate state measurement with superconducting qubits. *Physical review letters* **112**(19), 190504 (2014). [cf. p. 36, 38]
- [31] Eyob A. Sete, John M. Martinis et Alexander N. Korotkov. Quantum theory of a bandpass purcell filter for qubit readout. *Phys. Rev. A* **92**, 012325 (2015). [cf. p. 39]
- [32] Samuel Boutin, Christian Kraglund Andersen, Jayameenakshi Venkatraman, Andrew J Ferris et Alexandre Blais. Resonator reset in circuit qed by optimal control for large open quantum systems. *Phys. Rev. A* **96**(4), 042315 (2017). [cf. p. 40]
- [33] Andrew J Kerman. Quantum information processing using quasiclassical electromagnetic interactions between qubits and electrical resonators. *New J. Phys.* **15**(12), 123011 (2013). [cf. p. 42, 45]
- [34] P.-M. Billangeon, J. S. Tsai et Y. Nakamura. Circuit-qed-based scalable architectures for quantum information processing with superconducting qubits. *Phys. Rev. B* **91**, 094517 (2015). [cf. p. 42, 45]
- [35] Michael J. Peterer, Samuel J. Bader, Xiaoyue Jin, Fei Yan, Archana Kamal, Theodore J. Gudmundsen, Peter J. Leek, Terry P. Orlando, William D. Oliver

- et Simon Gustavsson. Coherence and decay of higher energy levels of a superconducting transmon qubit. *Phys. Rev. Lett.* **114**, 010501 (2015). [cf. p. 56, 86, 87]
- [36] Jerome Bourassa et Alexandre Blais. Ultra-strong coupling regime of cavity qed with flux qubits. Dans *APS Meeting Abstracts*, (2009). [cf. p. 65]